

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра строительной механики

Д. В. Леоненко

# РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

Учебно-методическое пособие  
для студентов строительных специальностей

*Одобрено методической комиссией факультета ПГС*

Гомель ■ 2006

УДК 539.3 (075.8)  
ББК 38.112  
Л47

Рецензент – кандидат технических наук В. В. Талецкий (УО «БелГУТ»)

**Леоненко, Д. В.**

Л47    Расчет плоских ферм: учебно-метод. пособие для студентов  
строительных специальностей / Д. В. Леоненко. – Гомель:  
УО «БелГУТ», 2006. – 57 с.  
ISBN 985-468-075-4

Изложены краткие теоретические сведения о расчете ферм на статическую подвижную и неподвижные нагрузки. Рассмотрены способы определения усилий в фермах. Приведены подробные примеры решения типовых задач.

Пособие соответствует действующей в настоящее время программе по строительной механике. Предназначено для студентов строительных специальностей всех форм обучения.

**УДК 539.3 (075.8)**  
**ББК 38.112**

ISBN 985-468-075-4

© Леоненко Д. В., 2006  
© Оформление. УО «БелГУТ», 2006

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

## 1 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Понятие о ферме . . . . .	4
1.2 Классификация . . . . .	6
1.3 Кинематический анализ ферм . . . . .	10
1.4 Расчет ферм на неподвижную нагрузку . . . . .	13
1.5 Анализ напряженного состояния ферм при неподвижной вертикальной нагрузке . . . . .	19
1.6 Расчет ферм на подвижную нагрузку . . . . .	21
1.7 Определение усилий по линиям влияния . . . . .	27
1.8 Понятие о шпренгельных фермах . . . . .	29
1.9 Кинематический метод построения линий влияния . . . . .	31

## 2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1 Расчет ферм способом вырезания узлов . . . . .	34
2.2 Расчет ферм способом сечений . . . . .	43
2.3 Расчет ферм на подвижную нагрузку . . . . .	46
2.4 Расчет шпренгельных ферм . . . . .	51
Список литературы . . . . .	57

# 1 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

## 1.1 Понятие о ферме

Стержневая система с жестким или шарнирным соединением прямолинейных элементов в узлах, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными, называется *фермой* (рисунок 1.1, а).

Сфера применения ферм весьма разнообразна: перекрытия зданий большого пролета, мосты, телевизионные башни и др. Рациональность этих конструкций обусловила их широкое распространение в настоящее время.

**Расчетная схема фермы.** В реальных фермах стержни соединены между собой жестко. При расчетах всегда принимают, что все узлы представляют собой идеальные шарниры, а нагрузки через систему вспомогательных конструкций передаются в узлы ферм (рисунок 1.1, б, в).

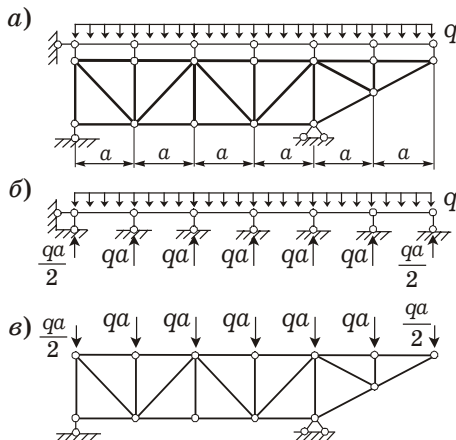


Рисунок 1.1

При шарнирном соединении элементов моменты в стержнях равны нулю. В этом случае элементы фермы работают на центральное сжатие или растяжение, напряжения во всех точках поперечного сечения стержня одинаковы. Это позволяет рационально использовать материал и получать более легкие конструкции по сравнению с балками. Поэтому при проектировании большепролетных конструкций предпочтение, как правило, отдают фермам.

В жестких узлах фермы возникает незначительный изгиб отдельных элементов, но напряжения от изгиба по сравнению с напряжениями от осевой силы малы, поэтому ими пренебрегают. В то же время в ряде случаев (например, в железобетонных фермах)

расчет осуществляется с учетом жесткости узлов, так как при игнорировании влияния изгибающих моментов возможны существенные погрешности в определении напряженного состояния массивных элементов. При этом ферма по характеру работы приближается к рамным конструкциям.

В действительности же нагрузки приложены не только к узлам, но и к отдельным стержням, т. е. расчетные схемы ферм значительно отличаются от реальных конструкций. Однако и в этом случае к ним применима с достаточной степенью приближения шарнирно-стержневая расчетная схема.

Идеализация расчетных схем, давая возможность упростить расчеты, незначительно сказывается на их точности. Применение шарнирно-стержневой схемы к реальным фермам подтверждена экспериментально.

В некоторых случаях, особенно при реконструкции существующих сооружений, может оказаться, что кроме узловой неизбежна внеузловая нагрузка. В этом случае стержни, воспринимающие внеузловую нагрузку, будут испытывать изгиб с растяжением или сжатием. Эти стержни отдельно рассчитывают на местную изгибную нагрузку.

**Основные элементы фермы.** Расстояние между осями опор фермы (рисунок 1.2) называется *пролетом*. Стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются поясами и образуют *пояса*. Совокупность стержней фермы между нижним и верхним ее поясами называется *решеткой*. Решетка, как правило, состоит из вертикальных (*стоек*) и наклонных (*раскосов*) стержней.

Если мысленно двигаться вдоль раскосов от опор фермы к середине, то по одним раскосам придется идти вниз, «нисходить», по другим – вверх, «восходить». В соответствии с этим раскосы подразделяют на *нисходящие* и *восходящие*.

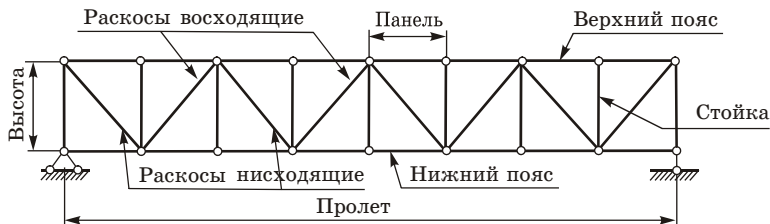


Рисунок 1.2

Часть фермы, расположенная между смежными узлами пояса, называется *панелью*, а расстояние между этими узлами пояса – длиной панели, наибольшее расстояние между поясами – *высотой* фермы.

Практика проектирования показывает, что оптимальные фермы получаются при соотношении размеров высоты к пролету примерно  $1/8 \dots 1/10$ .

## 1.2 Классификация

Фермы классифицируют по нескольким признакам.

В зависимости от характера структуры фермы разделяют на плоские и пространственные. Если все элементы ферм лежат в одной плоскости, их называют *плоскими*. *Пространственными* называют фермы, у которых оси всех стержней, включая опорные, не лежат в одной плоскости. Далее будем рассматривать только плоские фермы.

По назначению фермы подразделяют:

- на фермы пролетных строений мостов (рисунок 1.3, а);
- стропильные, используемые в качестве несущих конструкций покрытий промышленных и гражданских зданий (рисунок 1.3, б), а также подкрановые фермы;
- фермы башенных (рисунок 1.3, в), автомобильных и других кранов;
- фермы-мачты линий электропередачи (рисунок 1.3, г) и др.

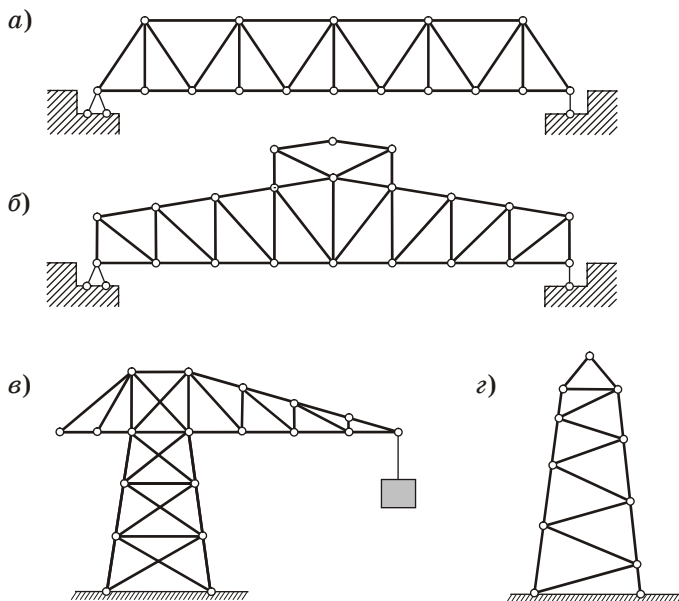


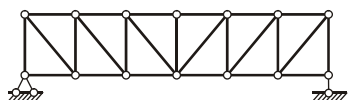
Рисунок 1.3

По очертанию поясов фермы делят (рисунок 1.4):

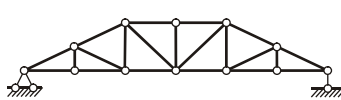
- на фермы с параллельными поясами;
- треугольные фермы;
- трапециевидные фермы;
- фермы с криволинейными поясами (полигональные).

У полигональных ферм негоризонтальными могут быть как один, так и оба пояса. Узлы в верхнем и нижнем поясах обычно располагаются по какой-либо кривой – параболической, эллиптической, коробовой или окружности. Стержни таких поясов прямолинейны и являются хордами кривой, на которой располагаются узлы.

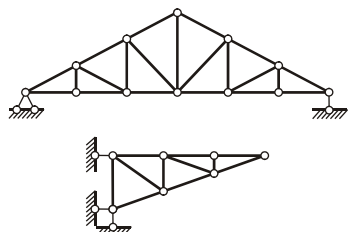
Ферма с параллельными поясами



Трапециевидная ферма



Треугольные фермы



Фермы с криволинейными поясами  
(полигональные)

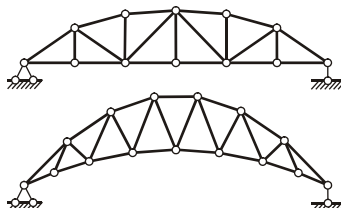


Рисунок 1.4

По типу решетки фермы подразделяют на фермы с простой и сложной решетками.

К фермам с *простой решеткой* (рисунок 1.5) относят:

- фермы с раскосной решеткой, которая представляет собой непрерывный зигзаг с попеременно чередующимися раскосами и стойками;
- фермы с треугольной решеткой, которая образована только одними раскосами с чередующимся наклоном. К этому же классу принадлежат фермы с треугольной решеткой и дополнительными стойками;
- фермы с полураскосной решеткой. Решетки таких ферм образованы путем замены раскосов на полураскосы. В каждой панели имеются два разных по направлению раскоса, идущих к стойке.

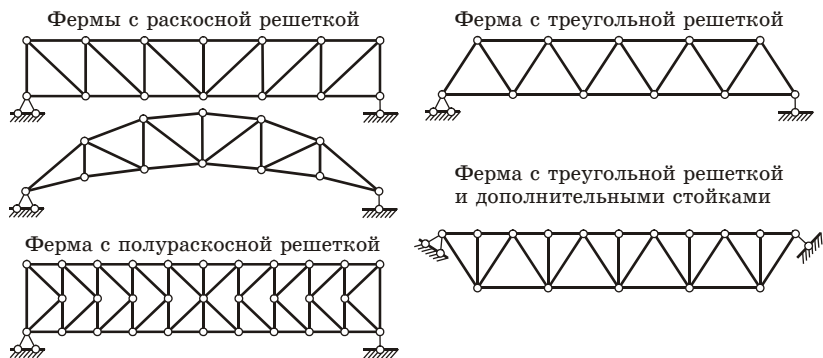


Рисунок 1.5

*Сложными решетками* называются такие, которые получают-ся наложением друг на друга двух и более простых решеток. Фермы с такими решетками (рисунок 1.6) подразделяют:

- на фермы с двухраскосной решеткой. Через каждую панель (кроме крайних) этой фермы проходят два раскоса одинакового направления;
- двухрешетчатые и многорешетчатые фермы;
- шпренгельные фермы. Их решетка образуется введением в обычную решетку дополнительных элементов — шпренгелей. Шпренгели воспринимают местную нагрузку, приложенную вне узлов основной фермы. Они уменьшают длину панелей сжатых поясов, в результате чего повышается устойчивость сжатых стержней.

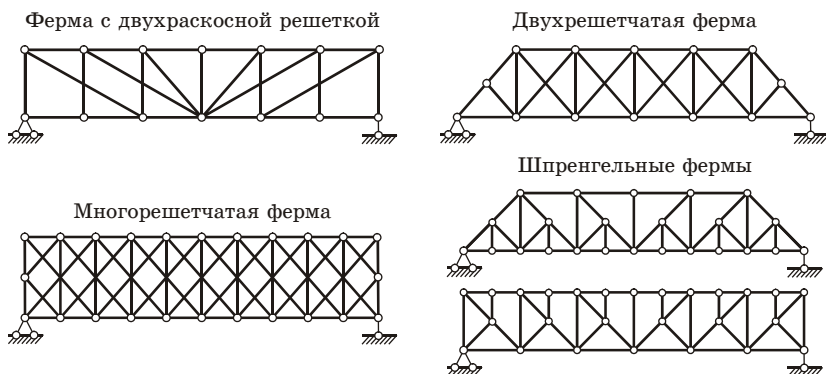


Рисунок 1.6



По направлению опорных реакций различают безраспорные и распорные фермы.

В опорах *безраспорных ферм* при действии на них вертикальной нагрузки возникают только вертикальные опорные реакции. Горизонтальная составляющая опорных реакций (распор) в шарнирно-неподвижной опоре равна нулю.

Безраспорные фермы (рисунок 1.7) в зависимости от расположения опор подразделяются на балочные, консольно-балочные (фермы на двух опорах), а также фермы-консоли, один конец которых оперт, другой свободен.

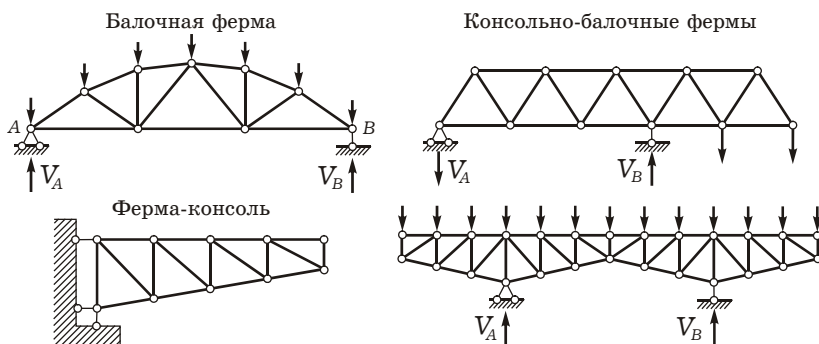


Рисунок 1.7

В опорах *распорных ферм* при действии вертикальной нагрузки всегда возникают наклонные опорные реакции. Горизонтальная составляющая реакций называется *распором* и обозначается  $H$  (рисунок 1.8). К распорным, как правило, относятся фермы с криволинейным очертанием поясов, например, арочные и висячие, а также трехшарнирные ферменные системы.

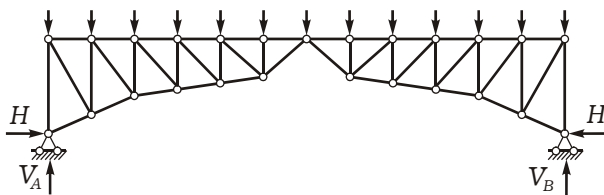


Рисунок 1.8

Заметим, что одна и та же по структуре ферма, но с разными опорами может относиться к различным классам. Так, ферма, изображенная на рисунке 1.9, а, является распорной, а на рисунке 1.9, б – безраспорной.

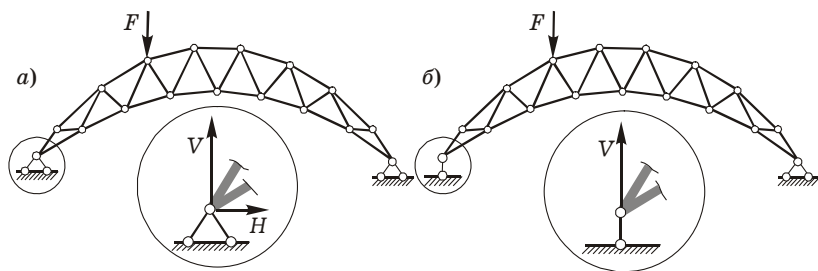


Рисунок 1.9

В зависимости от уровня езды мостовые фермы делятся на фермы с ездой понизу, фермы с ездой поверху и фермы с ездой посередине (рисунок 1.10).

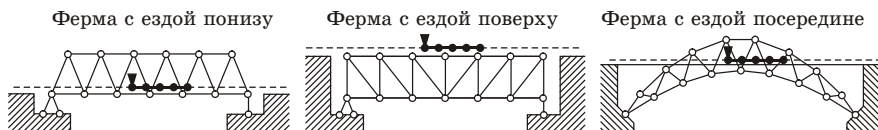


Рисунок 1.10

Рассмотренная классификация не является исчерпывающей. В ней указаны наиболее типичные расчетные схемы плоских ферм, которые применяются в практике строительства.

### 1.3 Кинематический анализ ферм

Всякая ферма, применяемая в строительстве, должна проектироваться так, чтобы она была *геометрически неизменяема* и *неподвижно прикреплена к земле*. Чтобы убедиться в неизменяемости фермы, проводят кинематический анализ. При этом основными понятиями являются диск – неизменяемый элемент сооружения и число степеней свободы  $W$  – число независимых геометрических параметров, определяющих положение диска или сооружения на плоскости.

*Кинематический анализ* состоит из следующих этапов:

- определение числа степеней свободы  $W$  системы и проверка необходимого аналитического условия неизменяемости;
- структурный анализ сооружения и проверка достаточного условия неизменяемости.

**Диски и способы их соединения.** Простейшим диском является шарнирный треугольник. Присоединяя к нему узлы с помощью двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой,

можно образовать новую более сложную геометрически неизменяемую систему (рисунок 1.11, а). Фермы, образованные подобным образом, называются *простейшими*.

Другие типы ферм могут быть получены путем соединения простейших с учетом правил неизменяемого соединения дисков.

Два диска на плоскости образуют геометрически неизменяемую систему при помощи:

- а) шарнира и стержня, ось которого не проходит через шарнир (рисунок 1.11, б);
- б) трех не параллельных и не пересекающихся в одной точке стержней (рисунок 1.11, в).

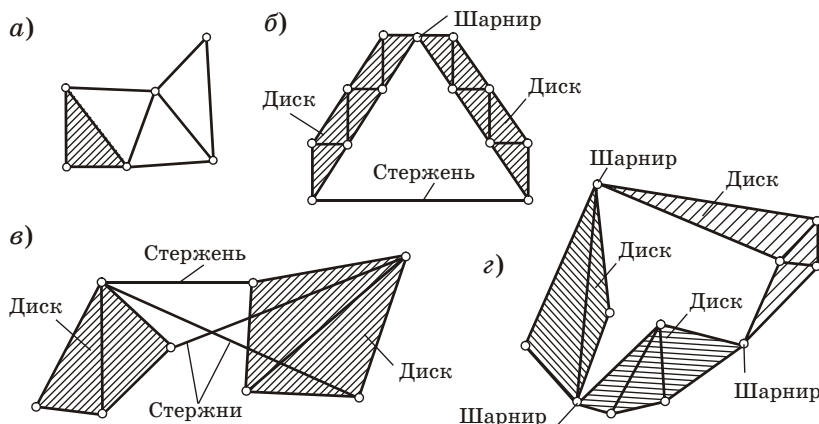


Рисунок 1.11

Три диска на плоскости образуют геометрически неизменяемую систему при помощи:

- а) трех простых шарниров, не лежащих на одной прямой (рисунок 1.11, г);
- б) шести стержней (трех пар), причем точки пересечения пар не должны лежать на одной прямой;
- в) соответствующего количества шарниров и стержней (один шарнир и четыре стержня; два шарнира и два стержня).

**Число степеней свободы** ферм  $W$  удобно вычислять по следующей формуле

$$W = 2U - C,$$

где  $U$  – число узлов фермы;

$C$  – число всех стержней фермы, включая опорные.

Число степеней свободы можно вычислить и по формуле Чебышева, которая справедлива для всех стержневых систем:

$$W = 3Д - 2Ш - C_{оп},$$

где  $Д$  – количество дисков;

$Ш$  – количество междисковых шарниров;

$C_{оп}$  – количество опорных стержней.

Однако использование этой формулы *нецелесообразно* из-за сложности подсчета числа шарниров, которые в фермах, как правило, кратные.

Если число степеней свободы  $W > 0$ , то ферма не имеет достаточного для геометрической неизменяемости количества связей и является геометрически изменяемой (механизмом).

Аналитическое условие неизменяемости

$$W \leq 0.$$

При  $W = 0$  ферма имеет минимально необходимое для геометрической неизменяемости количество связей и при правильной их расстановке является геометрически неизменяемой и *статически определимой*. При  $W < 0$  ферма имеет лишние связи и при правильной их расстановке является геометрически неизменяемой и *статически неопределимой*.

Если ферма рассчитывается без связи с основанием (без опорных стержней), то условие геометрической неизменяемости будет следующим:

$$C_{ф} = 2У - 3,$$

где  $C_{ф}$  – число стержней фермы.

Равенство нулю числа степеней свободы какой-либо стержневой системы является необходимым, но еще недостаточным условием ее неизменяемости, поэтому следующий этап проведения кинематического анализа – структурный анализ.

**Структурный анализ** можно проводить несколькими способами. При первом в исследуемой ферме отбрасывают последовательно узлы с двумя стержнями, и если в результате останется треугольник, то система геометрически неизменяема. При втором способе из фермы выделяют жесткие диски и рассматривают их соединение. Если они соединены по указанным выше правилам (см. с. 11), то система геометрически неизменяема.

Например, ферма, изображенная на рисунке 1.12, а, статически определима и возможно геометрически неизменяема. Число ее узлов  $У = 14$ , число стержней  $C_{ф} = 25$ . Разность  $2У - 3 = 2 \cdot 14 - 3 = 25$ .

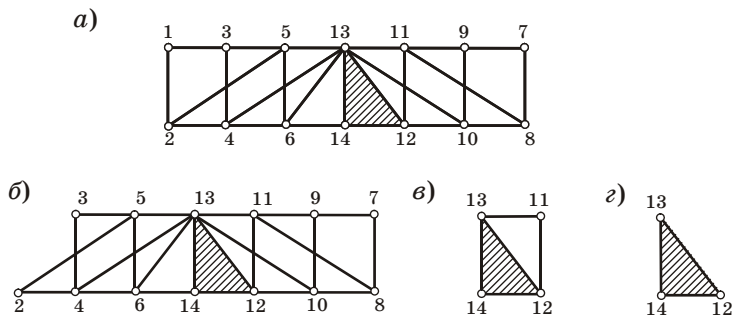


Рисунок 1.12

Исследуем структуру данной фермы. Отбрасываем последовательно узлы 1, 2, ..., 11 (рисунок 1.12, б, в) с двумя стержнями и в результате убеждаемся, что остается треугольник 12–13–14 (рисунок 1.12, г). Значит, система геометрически неизменяема.

## 1.4 Расчет ферм на неподвижную нагрузку

Расчет ферм состоит в определении продольных сил в их стержнях. Отличительной особенностью ферм является то, что при узловой передаче внешней нагрузки в качестве расчетной схемы принимается шарнирная ферма. При этом в стержнях возникают только продольные силы, вызывающие центральное растяжение или сжатие.

Заметим, что расчет, основанный на такой расчетной схеме, является приближенным. Он не учитывает влияние жесткости соединения элементов в узлах. Однако для большинства ферм, используемых в строительстве, это влияние не слишком велико.

**Классификация методов расчета.** Определение продольных сил может быть выполнено статическим, графическим и кинематическим методами.

Статический (аналитический) метод основан на использовании уравнений статического равновесия в виде суммы моментов относительно какой-либо точки или суммы проекций на две взаимно перпендикулярные оси  $x$ ,  $y$ :

$$\sum_k M_k = 0, \quad \sum_k X_k = 0, \quad \sum_k Y_k = 0.$$

Эти уравнения могут составляться как для всей фермы, так и для различных ее частей. Разновидностями статического метода являются *способ вырезания узлов* и *способ сечений*. Аналитический расчет балочной или консольно-балочной фермы обычно начинается с определения опорных реакций.

К графическому методу относят способ определения сил в стержнях с помощью диаграммы Максвелла<sup>1)</sup> – Кремоны<sup>2)</sup>. Здесь мы его рассматривать не будем, данный метод подробно изложен в учебниках [2, 6]. Как и другие графические методы, в настоящее время он используется редко.

Кинематический метод основан на принципе возможных перемещений и предполагает составление уравнений возможных работ внешних и внутренних сил. При расчете ферм на произвольную неподвижную нагрузку этот метод применяется редко из-за его трудоемкости. Однако при построении линий влияния (расчете на подвижную нагрузку) в простых фермах он позволяет получить результат весьма быстро.

**Способ вырезания узлов.** Он состоит в последовательном проведении разрезов, из которых каждый отсекает от фермы по одному узлу.

*Порядок расчета:*

- 1) определяют опорные реакции;
- 2) вырезают узел, в котором сходятся не более двух стержней;
- 3) в местах сечений прикладывают внутренние продольные силы, направляя их от сечений. Внутренние силы в перерезанных сечением стержнях рассматривают как внешние силы по отношению к отсеченным узлам;
- 4) для вырезанного узла составляют уравнения равновесия в виде суммы проекций на любые две непараллельные оси и определяют неизвестные усилия;
- 5) отсекают следующий узел с двумя неизвестными усилиями, определяют их и т. д.
- 6) уравнения равновесия для последнего вырезанного узла служат для проверки расчетов, т. к. усилия в рассеченных стержнях уже найдены.

Способом вырезания узлов может быть произведен расчет любой статически определимой фермы. Однако для сложных ферм он приводит к большому числу совместных уравнений и применяется для них главным образом как вспомогательный.

В простых фермах, образование которых можно проследить присоединением новых узлов двумя стержнями, вырезание узлов надо производить в последовательности их образования. При этом

---

<sup>1)</sup> Максвелл Джеймс Клерк (Maxwell James Clerk) (1831–1879), английский физик, создатель классической электродинамики, один из основоположников статистической физики. Автор теории взаимных фигур.

<sup>2)</sup> Кремона Луизи (Cremona Luigi) (1830–1903), итальянский геометр. В 1872 г. развил теорию взаимных фигур, предложенную Максвеллом, в приложении к теории расчета ферм.

в каждом вновь вырезанном узле появляется не более двух неизвестных сил. Основной недостаток данного способа состоит в том, что искомая продольная сила выражается через усилия в ранее рассмотренных стержнях. Это может привести к накоплению вычислительной погрешности результатов.

Сущность способа рассмотрим на примере фермы, изображенной на рисунке 1.13, а.

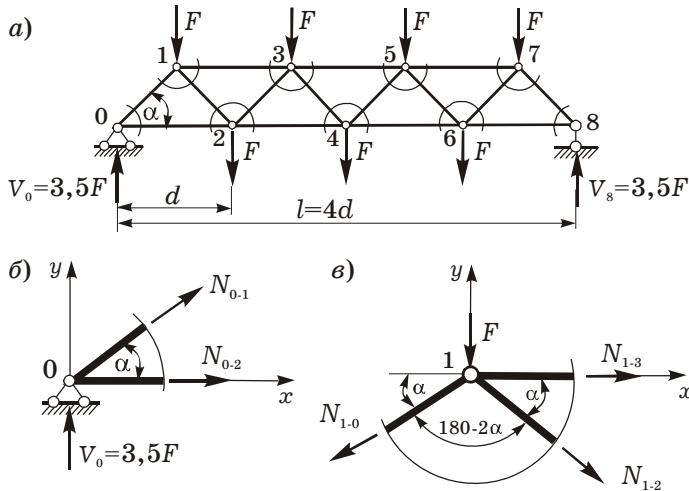


Рисунок 1.13

Опорные реакции определим, исходя из симметрии нагрузки относительно середины пролета:

$$V_0 = V_8 = 3,5F.$$

Вырежем узел 0 и рассмотрим его равновесие (рисунок 1.13, б). Прикладываем к стержням продольные силы, направленные в сторону отброшенной части фермы, предполагая, что стержни испытывают растяжение. Продольные силы будем обозначать  $N$  с индексом номеров узлов, принадлежащих рассматриваемому стержню. Например, в стержне 0–1 возникает продольная сила  $N_{0-1}$ .

Начало системы координат примем на опоре 0. Тогда

$$\sum Y = N_{0-1} \sin(\alpha) + V_0 = 0 \quad \text{и} \quad \sum X = N_{0-1} \cos(\alpha) + N_{0-2} = 0,$$

отсюда

$$N_{0-1} = -\frac{V_0}{\sin(\alpha)} = -\frac{3,5F}{\sin(\alpha)}, \quad N_{0-2} = -N_{0-1} \cos(\alpha) = 3,5F \operatorname{ctg}(\alpha).$$

Усилие  $N_{0-1} < 0$ , значит, стержень не растянут, как предполагалось ранее, а сжат. Стержень 0–2 растянут, т. к.  $N_{0-2} > 0$ . Усилия  $N_{0-1}$  и  $N_{0-2}$  далее считаем известными.

Вырежем узел 1 и рассмотрим его равновесие (рисунок 1.13, в). Систему координат привяжем к узлу 2. Тогда

$$\sum Y = -N_{1-0} \sin(\alpha) - F - N_{1-2} \sin(\alpha) = 0,$$

$$\sum X = -N_{1-0} \cos(\alpha) + N_{1-2} \cos(\alpha) + N_{1-3} = 0.$$

Отсюда получаем

$$N_{1-2} = -\frac{N_{1-0} \sin(\alpha) + F}{\sin(\alpha)} = \frac{2,5F}{\sin(\alpha)},$$

$$N_{1-3} = N_{1-0} \cos(\alpha) - N_{1-2} \cos(\alpha) = -\frac{3,5F}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) -$$

$$-\frac{2,5F}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) = -6F \operatorname{ctg}(\alpha).$$

$N_{1-2} > 0$ ,  $N_{1-3} < 0$ , значит, стержень 1–2 растянут, а 1–3 сжат.

Далее будем рассматривать равновесие узла 2, затем 3 и т. д. до узла 7. Правильность определения усилий проконтролируем равновесием вырезанного узла 8.

**Способ сечений** применяется тогда, когда одним сечением можно разделить ферму на две части, причем неизвестных сил в этом сечении не более трех. Он является одним из наиболее целесообразных способов определения усилий в отдельных стержнях ферм, т. к. позволяет определить их независимо от того, известны ли усилия в других стержнях. Способ сечений называют еще методом Риттера<sup>1)</sup>.

*Порядок расчета:*

- 1) определяют реакции связей;
- 2) рассекают ферму на две части таким образом, чтобы в сечении входило не более трех стержней с неизвестными усилиями;
- 3) отбрасывают одну из частей, а ее действие на другую заменяют продольными силами в перерезанных стержнях;
- 4) для оставшейся части фермы составляют уравнения равновесия так, чтобы каждое из них содержало одно неизвестное усилие. Для этого необходимо составлять уравнения

---

<sup>1)</sup> *Pumtner* (Ritter) Георг Август Дитрих (1826–1908), немецкий физик. В 1863 г. предложил для расчета ферм использовать способ сечений. В дальнейшем метод был усовершенствован Ф. С. Ясинским.



равновесия в виде суммы моментов относительно точки пересечения двух неизвестных сил или в виде суммы проекций сил на ось, перпендикулярную двум стержням, если они параллельны;

5) из уравнений равновесия определяют неизвестные усилия.

Рассмотрим пример (рисунок 1.14, а).

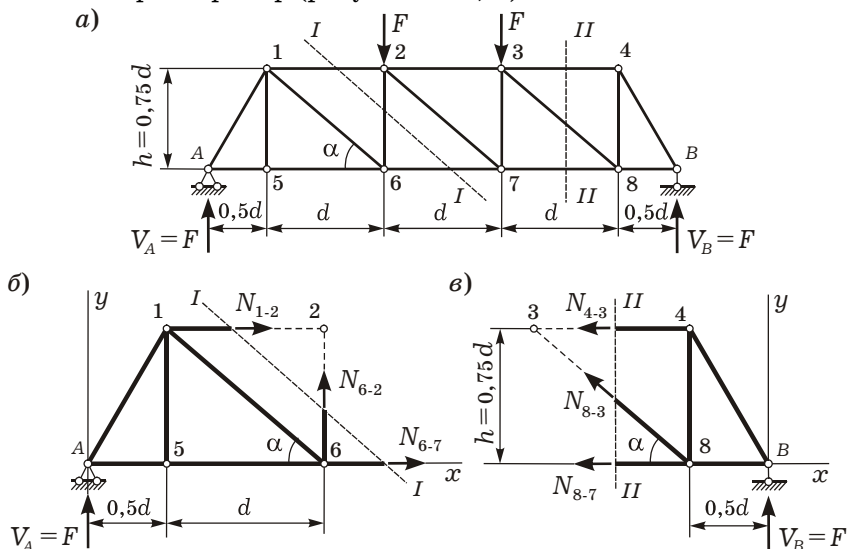


Рисунок 1.14

Опорные реакции определим, исходя из симметрии нагрузки относительно середины пролета:

$$V_A = V_B = F.$$

Определим усилие в стержне 1–2. Для этого проведем сечение I–I (см. рисунок 1.14, а). Сечение пройдет через стержни 6–2 и 6–7. Отбросим правую часть, введем внутренние усилия и рассмотрим равновесие оставшейся части (рисунок 1.14, б). Продольные силы направим в сторону отброшенной части, т. е. введенные усилия растягивают стержни фермы. Левая часть фермы находится в равновесии под действием известной реакции связи  $V_A$  и трех неизвестных усилий  $N_{1-2}$ ,  $N_{6-2}$  и  $N_{6-7}$ .

Усилие в стойке 6–2 найдем из уравнения проекций на вертикальную ось  $y$ , т. к. проекции неизвестных усилий в стержнях 1–2 и 6–7 на данную ось равны нулю:

$$\sum Y = N_{6-2} + V_A = 0, \quad N_{6-2} = -V_A = -F.$$

Продольная сила отрицательна, значит, стержень 6–2 сжат.

За моментную точку принимаем узел, где сходятся два неизвестных усилия. Для нахождения  $N_{1-2}$  составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия оставшихся неизвестных – точки 6. Относительно этой точки момент сил  $N_{6-2}$  и  $N_{6-7}$  равен нулю, и в уравнение входит одна неизвестная:

$$\sum M_6 = -N_{1-2}h - V_A(d + 0,5d) = 0,$$

отсюда

$$N_{1-2} = -\frac{V_A 1,5d}{h} = -\frac{1,5d}{0,75d} F = -2F.$$

Продольная сила отрицательна, значит, стержень 1–2 сжат.

Силу  $N_{6-7}$  найдем, составляя уравнение равновесия моментов относительно точки 2, где пересекаются стержни 1–2 и 6–2:

$$\sum M_2 = N_{6-7}h - V_A(d + 0,5d) = 0, \quad N_{6-7} = \frac{V_A 1,5d}{h} = \frac{1,5d}{0,75d} F = 2F.$$

Продольная сила положительна, значит, стержень 6–7 растянут.

Проведем сечение II–II. В сечение попали стержни поясов 4–3, 8–7 и раскос 8–3. Рассмотрим равновесие правой части (рисунок 1.14, в):

$$\sum Y = N_{8-3} \sin \alpha + V_A = 0, \quad N_{8-3} = -\frac{V_A}{\sin \alpha} = -\frac{F}{\sin \alpha};$$

$$\sum M_3 = -N_{8-7}h + V_A(d + 0,5d) = 0, \quad N_{8-7} = \frac{V_A 1,5d}{h} = \frac{1,5d}{0,75d} F = 2F;$$

$$\sum M_8 = N_{4-3}h + V_A 0,5d = 0,$$

$$N_{4-3} = -\frac{V_A 0,5d}{h} = -\frac{0,5d}{0,75d} F = -\frac{2}{3} F.$$

В результате получили, что стержни 4–3 и 8–3 сжаты, а 8–7 растянут. Аналогично можно определить усилия в других стержнях.

**Особенности расчета консолей.** Как ранее отмечалось, при нахождении усилий в стержнях фермы вначале следует определять реакции опор. Однако если можно составить уравнения равновесия, в которых не участвуют реакции связей, то этот этап можно пропустить. На рисунке 1.15 изображена ферма-консоль, для которой усилия в стержнях определяют, рассматривая равновесие только левой части – отсеченной консоли.

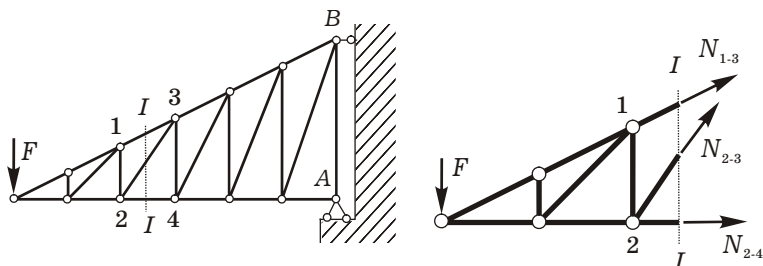


Рисунок 1.15

Исключение составляет стержень  $A-B$ , для нахождения продольной силы в котором необходимо предварительно вычислить значения реакций связей, например в точке  $A$ .

## 1.5 Анализ напряженного состояния ферм при неподвижной вертикальной нагрузке

Во многих простых фермах без расчета можно представить качественную картину распределения усилий в их стержнях: определить знаки и дать оценку соотношений величин продольных сил. Для этого ферму необходимо сравнить с балкой – системой, более простой по образованию, несущей такую же нагрузку.

Рассмотрим ферму с параллельными поясами и соответствующую ей простую балку (рисунок 1.16).

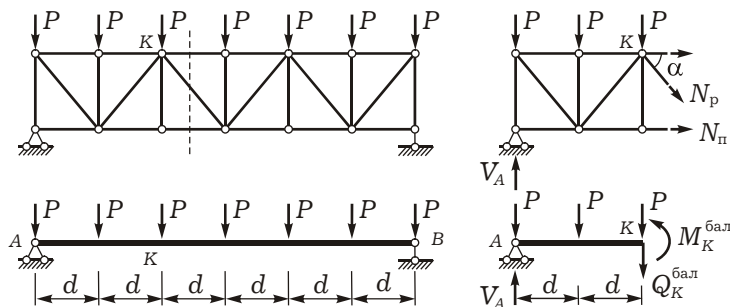


Рисунок 1.16

Определим продольную силу в стержне нижнего пояса  $N_{п}$ . Составим уравнения равновесия левой части фермы и балки в виде суммы моментов относительно точки  $K$ , из которых получим

$$\text{для фермы } N_{п}h = V_A \cdot 2d - P \cdot 2d - Pd ;$$

$$\text{для балки } M_K^{\text{бал}} = V_A \cdot 2d - P \cdot 2d - Pd .$$

Правые части этих выражений равны, следовательно, равны и левые:  $N_{\Pi} h = M_K^{\text{бал}}$ . Отсюда

$$N_{\Pi} = M_K^{\text{бал}} / h ,$$

т. е. *продольные силы в поясах фермы пропорциональны изгибающим моментам в сечениях соответствующей балки*. Наибольшие значения усилий возникают в середине пролета, наименьшие – у опор. С увеличением высоты  $h$  значения продольных сил уменьшаются, и наоборот.

Однако по конструктивным соображениям нежелательно увеличивать высоту  $h$  без увеличения длины панели  $d$ . Для наиболее удобного соединения стержней в узлах углы между поясами и раскосами не должны слишком отличаться от  $45^\circ$ . Но удлинение панели приводит к появлению больших усилий в стержнях, а следовательно, к увеличению размеров поперечных сечений. Чтобы этого избежать, проектируют полураскосные (см. рисунок 1.5) и шпренгельные (см. рисунок 1.6) фермы.

В фермах, работающих на неподвижную нагрузку, стремятся избегать больших изменений усилий в поясах, а значит, и больших изменений поперечных сечений поясов. Для этого высоту фермы делают переменной – пропорциональной ординатам балочной эпюры моментов (рисунок 1.17).

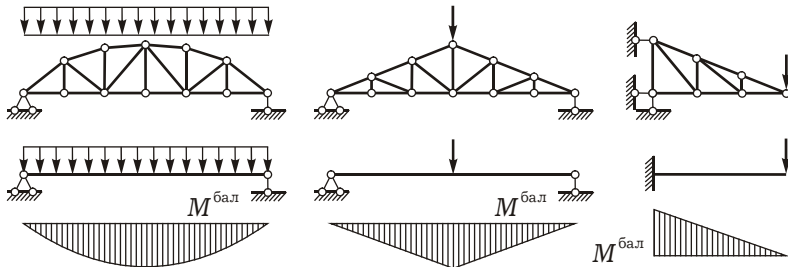


Рисунок 1.17

Определим продольную силу в нисходящем раскосе  $N_p$  (см. рисунок 1.16). Составим уравнение равновесия в виде суммы проекций на вертикальную ось, из которых получим

$$\text{для фермы } N_p \sin \alpha = V_A - 3P ;$$

$$\text{для балки } Q^{\text{бал}} = V_A - 3P .$$

Правые части этих выражений равны, следовательно, равны и левые:  $N_p \sin \alpha = Q^{\text{бал}}$ . Отсюда

$$N_p = Q^{\text{бал}} / \sin \alpha ,$$

т. е. *продольные силы в раскосах фермы пропорциональны поперечным силам в сечениях соответствующей балки.*

Для левой половины балки  $Q^{\text{бал}} > 0$ . Следовательно, *в нисходящих раскосах усилия положительны, эти стержни растянуты.* Аналогично можно составить выражение для продольной силы в восходящем раскосе и стойке. Получим, что силы здесь отрицательны, т. е. *восходящие раскосы и стойки сжаты.*

## 1.6 Расчет ферм на подвижную нагрузку

*Подвижной нагрузкой* будем называть такую, как правило, вертикальную нагрузку, которая может перемещаться в пределах сооружения. Подобная нагрузка создается, например, движущимся по мосту транспортом или перемещающимися по подкрановым путям мостовыми кранами. При этом усилия, возникающие в сооружении, будут зависеть от положения нагрузки. Будем считать, что нагрузка перемещается по сооружению с небольшими ускорениями, поэтому динамическими эффектами, возникающими при этом, можно пренебречь.

Задача расчета сооружений на подвижную нагрузку состоит в определении внутренних усилий в ее сечениях при любом ее положении. В частности, важно найти *невыгоднейшее* или *опасное положение нагрузки*, т. е. такое положение, при котором усилие в данном элементе конструкции достигает максимального по модулю значения. По усилиям, возникающим при опасном положении нагрузки, и выполняется подбор сечения стержней в системе.

Поскольку фермы часто используются в пролетных строениях мостов, в качестве несущих конструкций эскалаторов в метро, как стрелы подъемных кранов, то их часто приходится рассчитывать на действие подвижной нагрузки.

Расчет стержневых систем на подвижную нагрузку выполняется при помощи линий влияния. *Линией влияния* (л. в.) называется график, показывающий закон изменения какого-либо фактора в одном заданном сечении сооружения при движении безразмерного груза  $P = 1$  по всей системе.

**Линии влияния в простых балках.** Рассмотрим простую балку на двух опорах, перекрывающую пролет  $l$  (рисунок 1.18, а). Построим линии влияния опорных реакций  $V_A$ ,  $V_B$  и изгибающего момента  $M_C$  в сечении в центре балки.

Пусть единичная подвижная сила  $P = 1$  приложена на расстоянии  $z$  от левой опоры. Она вызовет в опорах  $A$  и  $B$  вертикальные реакции. Определим их из уравнений статики:

$$\sum M_B = 0, \quad V_A l - P(l - z) = 0;$$

$$\sum M_A = 0, \quad -V_B l + Pz = 0,$$

отсюда

$$V_A = \frac{l-z}{l}; \quad V_B = \frac{z}{l}.$$

Строим линии влияния балочных опорных реакций  $V_A$  и  $V_B$  (рисунок 1.18, б, в). Положительные ординаты откладываем вверх.

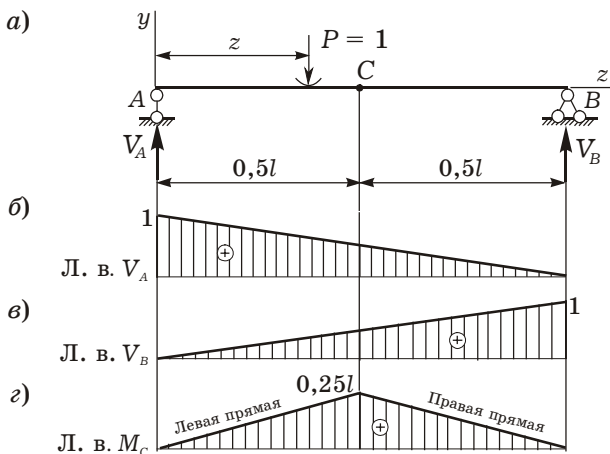


Рисунок 1.18

Итак, при перемещении груза от левой опоры к правой величина опорной реакции  $V_A$  уменьшается от единицы до нуля по линейному закону.

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_C$  необходимо рассмотреть два случая, когда груз находится левее и правее рассматриваемого сечения C. Результаты будем вести в табличной форме (таблица 1.1).

Изгибающий момент в середине пролета балки равен нулю при нахождении груза на опорах (рисунок 1.18, г) и достигает максимального значения, когда положение единичной силы совпадает с рассматриваемым сечением (при  $z = 0,5l$ ,  $M_C = 0,25l$ ).

Важно четко уяснить разницу между эпюрой и линией влияния. При построении *эпюры* определяются внутренние усилия в различных сечениях балки при неподвижной нагрузке, а при построении *линии влияния* определяется усилие в каком-то одном сечении при разных положениях единичной силы, действующей на систему.

Таблица 1.1

Груз $P = 1$ левее т. С ( $z \leq l/2$ )	Груз $P = 1$ правее т. С ( $z \geq l/2$ )
$M_C^{\text{прав}} = 0; -M_C + V_B 0,5l = 0;$ $M_C = V_B 0,5l = 0,5z$ (уравнение левой прямой)	$M_C^{\text{лев}} = 0; M_C - V_A 0,5l = 0;$ $M_C = V_A 0,5l = 0,5(l - z)$ (уравнение правой прямой)
$M_C _{z=0} = 0; M_C _{z=0,5l} = 0,25l$	$M_C _{z=0,5l} = 0,25l, M_C _{z=l} = 0$

Более подробно построение линий влияния в балках рассмотрено в пособии [5].

**Линии влияния при узловой передаче нагрузки.** В фермах нагрузка обычно передается на узлы посредством вспомогательных конструкций, например через настил и систему продольных и поперечных балок (рисунок 1.19).

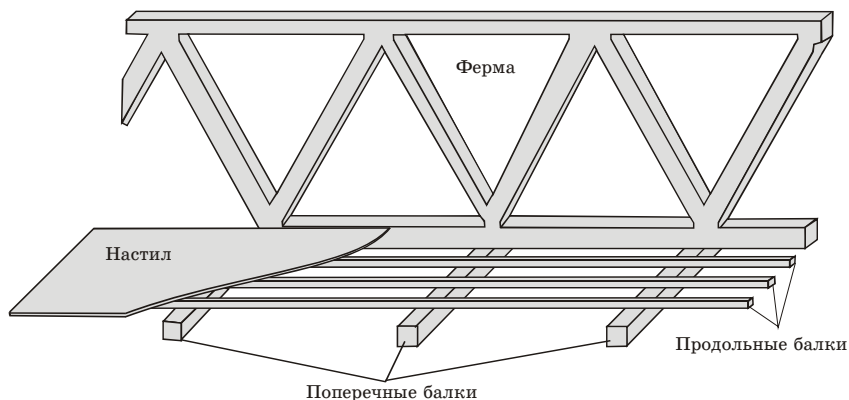


Рисунок 1.19

Пояс, по которому передвигается подвижная нагрузка, называется *грузовым*.

Для построения линий влияния в стержнях ферм применяют те же приемы, что и при определении усилий в них от действия неподвижной нагрузки (способ сечений, способ вырезания узлов). Необходимо только ввести координату единичной силы на грузовом поясе и проанализировать зависимость величины усилия в стержне от положения груза.

Линии влияния усилий в панелях верхнего и нижнего поясов фермы строятся, как правило, с помощью уравнений равновесия моментов. На протяжении рассеченной панели, по которой движется груз, проводится передаточная прямая, соединяющая проекции узлов фермы на линии влияния.

При построении линий влияния следует различать два вида сечений: *междуопорное* и *консольное*. Междуопорное сечение разделяет ферму на две части, в каждой из которых находится одна из опор. Консольное сечение также делит ферму на две части, причем одна из них свободна от опорных реакций. Способ построения линии влияния зависит от вида сечения.

Порядок построения линий влияния продольных сил в стержнях междуопорной части:

- 1) строят линии влияния опорных реакций;
- 2) проводят сечение не более чем через три стержня, в том числе и рассматриваемый;
- 3) составляют уравнения  $\sum Y = 0$  или  $\sum M = 0$  правой части фермы, когда груз  $P = 1$  слева от сечения, и левой части, когда груз справа от сечения. При этом в уравнение должны входить только искомая продольная сила и одна из опорных реакций;
- 4) под узлами рассеченного стержня грузового пояса строят передаточную прямую, слева от передаточной проводят левую прямую, справа – правую.

Порядок построения линий влияния продольных сил в стержнях консоли:

- 1) проводят сечение не более чем через три стержня, в том числе и рассматриваемый;
- 2) составляют уравнения  $\sum Y = 0$  или  $\sum M = 0$ , когда груз  $P = 1$  слева и справа от сечения, всегда рассматривая равновесие отсеченной консоли. Если используют уравнение моментов, то координату  $z$  груза отсчитывают от моментной точки;
- 3) под узлами рассеченного стержня грузового пояса строят передаточную прямую, слева от передаточной проводят левую прямую, справа – правую.

В качестве примера рассмотрим построение линий влияния опорных реакций и усилий в стержнях 1–2, 3–4 и 3–2 для фермы, изображенной на рисунке 1.20, а. Опорные реакции в балочной ферме совпадают с опорными реакциями соответствующей простой балки. Значит, и линии влияния опорных реакций в ферме будут такие же, как в балке. На рисунке 1.20, б показаны линии влияния  $V_A$  и  $V_B$ .

Рассечем ферму сечением  $I-I$  и поочередно рассмотрим равновесие ее левой и правой частей (рисунок 1.21).

Усилие в стержне 1–2 определяем из уравнения моментов относительно узла 3, где пересекаются оси двух других стержней. Продольную силу в стержне 3–4 получим, составляя уравнения равновесия моментов относительно точки 2. Проецируя силы на



вертикальную ось  $y$ , получим продольное усилие в стержне 3–2. Все усилия выражаются через реакции опор, и линии влияния будут подобны линиям влияния соответствующих опорных реакций. Результаты сведем в таблицу 1.2.

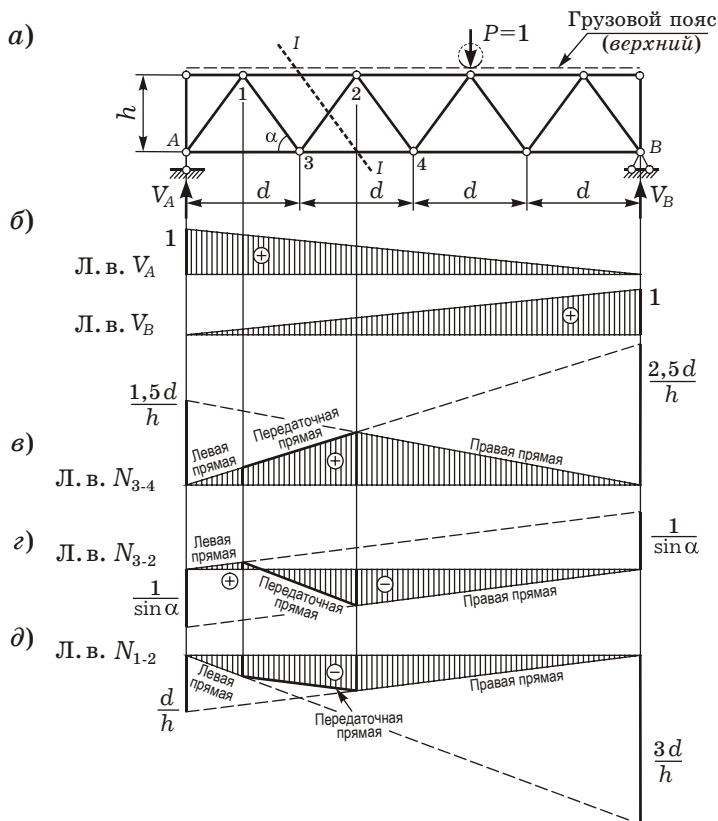


Рисунок 1.20

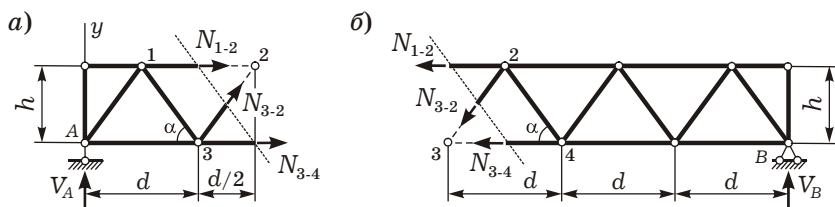


Рисунок 1.21

В общем случае, чтобы построить линии влияния, необходимо учитывать расположение грузового пояса, т. е. пояса, по которому перемещается подвижная нагрузка.

Таблица 1.2

Груз $P = 1$ левее сечения $I-I$	Груз $P = 1$ правее сечения $I-I$
$\sum M_2^{\text{прав}} = 0; V_B 2,5d - N_{3-4}h = 0;$ $N_{3-4} = \frac{2,5d}{h} V_B$ (уравнение левой прямой)	$\sum M_2^{\text{лев}} = 0; N_{3-4}h - V_A 1,5d = 0;$ $N_{3-4} = \frac{1,5d}{h} V_A$ (уравнение правой прямой)
$\sum Y^{\text{прав}} = 0; V_B - N_{2-3} \sin \alpha = 0;$ $N_{2-3} = \frac{1}{\sin \alpha} V_B$ (уравнение левой прямой)	$\sum Y^{\text{лев}} = 0; V_A + N_{2-3} \sin \alpha = 0;$ $N_{2-3} = -\frac{1}{\sin \alpha} V_A$ (уравнение правой прямой)
$\sum M_3^{\text{прав}} = 0; V_B 3d + N_{1-2}h = 0;$ $N_{1-2} = -\frac{3d}{h} V_B$ (уравнение левой прямой)	$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; -V_A d - N_{1-2}h = 0;$ $N_{1-2} = -\frac{d}{h} V_A$ (уравнение правой прямой)

Предположим, что грузовым является верхний пояс. Рассмотрим построение линии влияния. Для этого, согласно таблице 1.2, отложим над левой опорой величину  $1,5d/h$  и построим скорректированную линию влияния опорной реакции  $V_A$  (штриховая линия на рисунке 1.20, в). Над правой опорой вверх отложим отрезок  $2,5d/h$  и построим левую ветвь линии влияния  $N_{3-4}$ .

Проецируем узлы 1 и 2 на линии влияния и полученные точки соединяем прямой линией. Таким образом, линия влияния усилия  $N_{3-4}$  состоит из 3 участков: левее точки 1 справедливы уравнения для левой прямой, правее точки 2 справедливы уравнения для правой прямой, в пределах рассеченной грузовой панели 1-2 располагается передаточная прямая.

Аналогично строятся линии влияния усилий  $N_{3-2}$  и  $N_{1-2}$  (рисунок 1.20, г, д).

Рассмотрим движение нагрузки  $P = 1$  по нижнему поясу (рисунок 1.22, а). Линии влияния опорных реакций будут такими же, как на рисунке 1.20, б, т. к. они не зависят от того, какой пояс грузовой.

Уравнение левой прямой справедливо левее точки 3, а уравнение правой прямой – правее точки 4. Проецируем эти узлы на линии влияния и соединяем полученные точки между собой передаточной прямой. Линии влияния для усилий в стержнях показаны на рисунке 1.22, в, г, д.

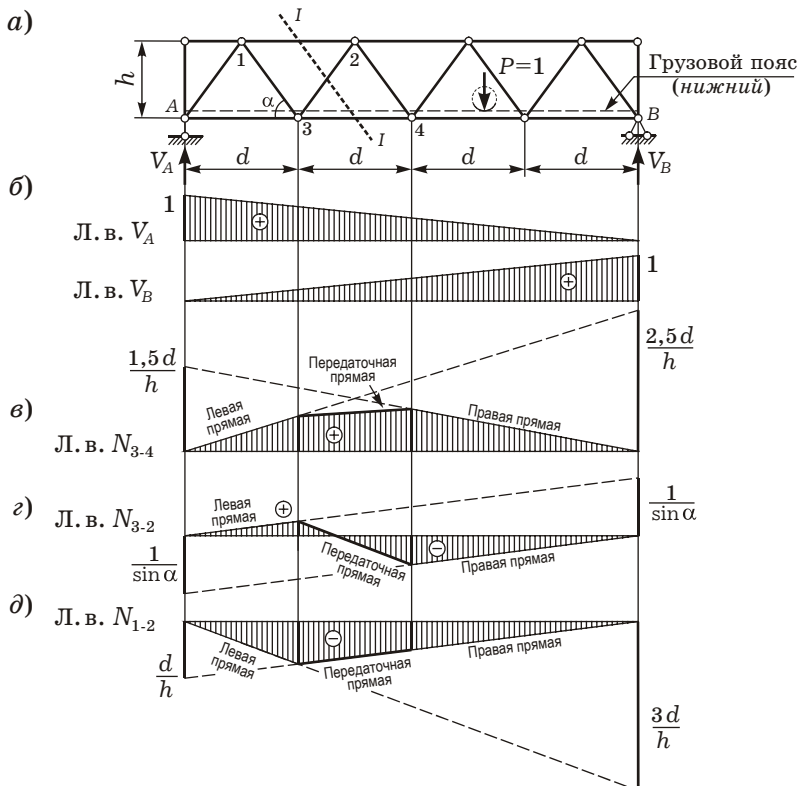


Рисунок 1.22

## 1.7 Определение усилий по линиям влияния

С помощью линий влияния можно определить усилия в стержнях фермы при действии неподвижной нагрузки.

**Загружение сосредоточенными силами.** Пусть по грузовому поясу движется груз весом  $P$ . Тогда усилие в стержне

$$N = Py,$$

где  $y$  – ордината линии влияния под точкой приложения силы  $P$ .

Действительно,  $y$  – усилие, возникающее в стержне от действия приложенной в данной точке единичной силы. В силу линейности задачи, при увеличении нагрузки в  $P$  раз, усилие в стержне тоже возрастет во столько же раз.

Если грузовой пояс фермы загружен несколькими сосредоточенными силами (рисунок 1.23), то на основании принципа су-

перпозиции усилие в стержне будет определяться по формуле

$$N = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots + P_n y_n = \sum_{i=1}^n P_i y_i ,$$

где  $y_i$  – ордината линии влияния под силой  $P_i$  (см. рисунок 1.23), взятая со своим знаком.

При этом для нагрузок, направленных вниз, произведение берется со знаком, совпадающим со знаком ординаты линии влияния.

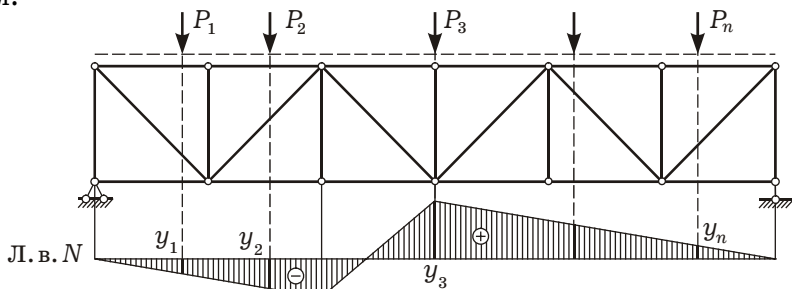


Рисунок 1.23

**Загружение распределенной нагрузкой.** Пусть на участке длиной  $L$  грузового пояса действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ .

Во избежание недоразумений подчеркнем, что здесь, как ранее, так и далее, считается, что нагрузка приложена к вспомогательным конструкциям, а с них – передается на узлы фермы. В этом случае усилие в стержне фермы определяется по формуле

$$N = q\omega ,$$

где  $\omega$  – площадь, ограниченная линией влияния под зоной действия нагрузки  $q$ .

Действительно, выделим в зоне действия нагрузки  $q$  участок бесконечно малой длиной  $dz$  (рисунок 1.24). Элементарная равнодействующая сила, действующая на ферму, с этого участка составляет  $dF = q dz$ , а усилие, возникающее от ее действия в стержне,  $dN = dF y(z) = q dz y(z)$ .

Для того чтобы найти усилие в стержне от действия всей нагрузки, необходимо проинтегрировать  $dN$  по длине:

$$N = \int_L dN = \int_L q y(z) dz = q \int_L y(z) dz = q\omega .$$

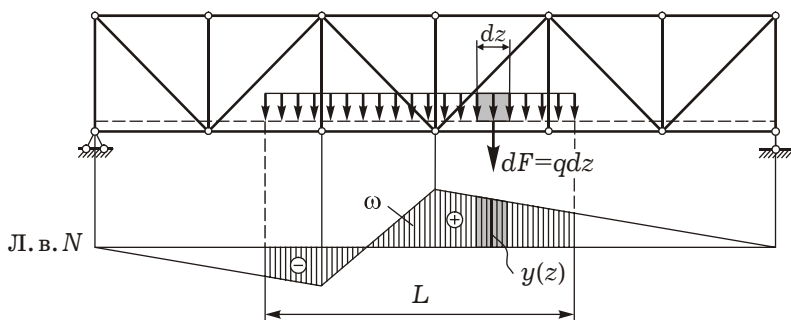


Рисунок 1.24

Отметим, что площадь необходимо определять с учетом знака, т. е. часть площади  $\omega$  снизу от горизонтальной оси берется со знаком минус.

## 1.8 Понятие о шпренгельных фермах

Если заменить один или несколько стержней фермы более сложными элементами, имеющими вид ферм, то можно получить составную ферму. Частным случаем таких ферм можно считать *шпренгельные фермы*.

Шпренгельные фермы образуются из ферм с простой решеткой, у которых все или некоторые панели грузового пояса путем введения дополнительных стержней подразделяются на части. Фермы с простой решеткой без дополнительных стержней, входящие в шпренгельную ферму, называют *основными*.

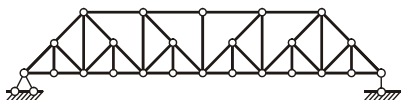
К разделению панелей основной фермы прибегают в фермах большой высоты, перекрывающих большие пролеты. Чем больше высота фермы, тем меньше усилия в ее поясах. По конструктивным соображениям удобно располагать раскосы под углом  $45^\circ$  к поясам фермы, поэтому увеличение высоты ферм приводит к увеличению ее панелей. Так, при этом условии в ферме с параллельными поясами панели должны быть равны высоте.

Однако проектирование больших панелей фермы моста вызывает увеличение массы его проезжей части. Экономия материала, достигаемая при увеличении высоты фермы, может оказаться меньше затрат на устройство проезжей части. Это проблема может быть решена вводом в каждую панель грузового пояса шпренгелей. *Шпренгель* – это дополнительная ферма, стержни которой воспринимают лишь местную нагрузку и передают ее в узлы основной фермы. Если нагрузка в пределах данного шпренгеля отсутствует, то усилия в его стержнях равны нулю.

Шпренгели позволяют поставить поперечные балки не только в основных узлах фермы, но и в дополнительных, тем самым уменьшить пролет и размеры сечений вспомогательных балок.

Шпренгели могут быть *одноярусными* и *двухъярусными*. Одноярусные передают нагрузку, приложенную к узлам пояса вертикально к этому же поясу. Двухъярусные передают нагрузку, приложенную к одному поясу, в другой пояс (рисунок 1.25).

Ферма с одноярусными шпренгелями  
(грузовой пояс нижний)



Далее загружают шпренгели в промежуточных узлах местной нагрузкой и, считая, что они имеют жесткие опоры в узлах основной фермы, определяют усилия в элементах дополнительной фермы (рисунок 1.26, в). Усилия в общих стержнях основной фермы и шпренгелей определяют алгебраическим (с учетом знака) суммированием.

В шпренгельной ферме на 10–15% изменятся усилия в стержнях третьей группы (принадлежащих одновременно основной ферме и шпренгелю). Уменьшатся расчетные длины элементов грузового пояса и раскосов, что особенно важно для повышения устойчивости сжатых элементов.

Порядок построения линий влияния а) линий влияния аналогичен порядку вычисления усилий от неподвижной нагрузки. Линии влияния в стержнях основной фермы строятся как для фермы с простой решеткой; линии влияния в стержнях шпренгелей – как для вырезанной двухопорной фермочки; линии влияния усилий стержней, общих для основной фермы и шпренгеля, определяются алгебраическим суммированием ординат линий влияния, построенных в основной ферме без учета шпренгеля и в вырезанном шпренгеле.

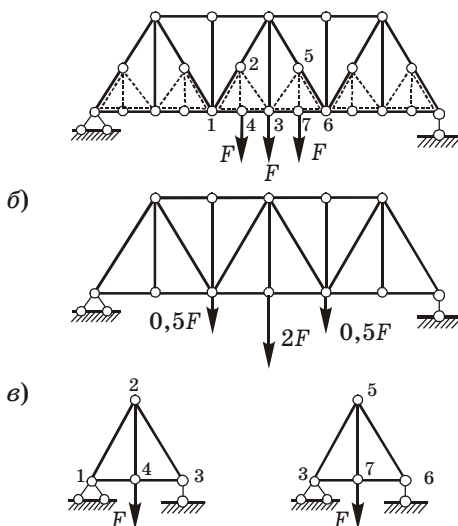


Рисунок 1.26

## 1.9 Кинематический метод построения линий влияния

Как и в любой стержневой системе, для вычисления усилий в стержнях фермы при подвижной и неподвижной нагрузках можно использовать кинематический метод. Он основан на принципе возможных перемещений и изложен, например, в [5].

Рассмотрим последовательность построения линий влияния продольных сил этим методом:

- 1) необходимо отбросить связь (разрезать стержень фермы), соответствующую рассматриваемому усилию, превратив ферму в механизм с одной степенью свободы;

- 2) полученному механизму следует сообщить единичное перемещение по направлению продольной силы в отброшенном стержне;
- 3) эпюра вертикальных перемещений узлов грузового пояса фермы с отброшенным стержнем по форме будет совпадать с линией влияния рассматриваемого усилия.

Перемещения узлов считаются малыми. В соответствии с этим можно пренебречь горизонтальными перемещениями и принять, что узлы смещаются только по вертикали – вверх или вниз.

Рассмотрим статически определимую балочную ферму с параллельными поясами (рисунок 1.27, а).

Разрежем в ферме один стержень, например, 3–4', получим механизм с одной степенью свободы (рисунок 1.27, б). В левой и правой частях фермы выделим неизменяемые части механизма – диски I и II. Стержни поясов 3–4 и 3'–4' образуют «ползун», допускающий сдвиг дисков I и II. Задаем перемещение  $\delta = 1$  в направлении продольной силы в отброшенном стержне (взаимное сближение узлов 3 и 4'). Диски поворачиваются относительно опор, оставаясь параллельными друг другу. Очертание грузового пояса по форме будет совпадать с линией влияния усилия в раскосе  $N_{3-4'}$ .

Далее разрежем в заданной ферме стержень 3–4 верхнего пояса (рисунок 1.27, в) и зададим перемещение  $\delta = 1$  как взаимное сближение узлов 3 и 4. Диски I и II соединены в узле 4', относительно которого и происходит их взаимный поворот. Очертание линии влияния  $N_{3-4}$  совпадает с очертанием грузового пояса.

Аналогично построим линию влияния продольной силы в стержне нижнего пояса  $N_{5'-6'}$ . В результате взаимного сближения узлов 5' и 6' диски I и II поворачиваются (рисунок 1.27, г), узел 5 поднимается вверх, что соответствует линии влияния  $N_{5'-6'}$ .

Разрежем стойку 2–2' и зададим перемещение  $\delta = 1$  как взаимное сближение узлов 2 и 2' (рисунок 1.27, д). Для полученного механизма с одной степенью свободы стержни 1–2 и 2–3 поворачиваются, узел 2 опускается вниз. Очертание верхнего (грузового) пояса по форме совпадает с линией влияния продольной силы в стойке  $N_{2-2'}$ .

Заметим, что вычисление ординат линий влияния, построенных кинематическим методом, достаточно трудоемко. Особенно сложно найти ординаты для ферм с непараллельными поясами, со сложной решеткой. Поэтому чаще всего кинематический метод применяют для проверки линий влияния, построенных статическим методом.



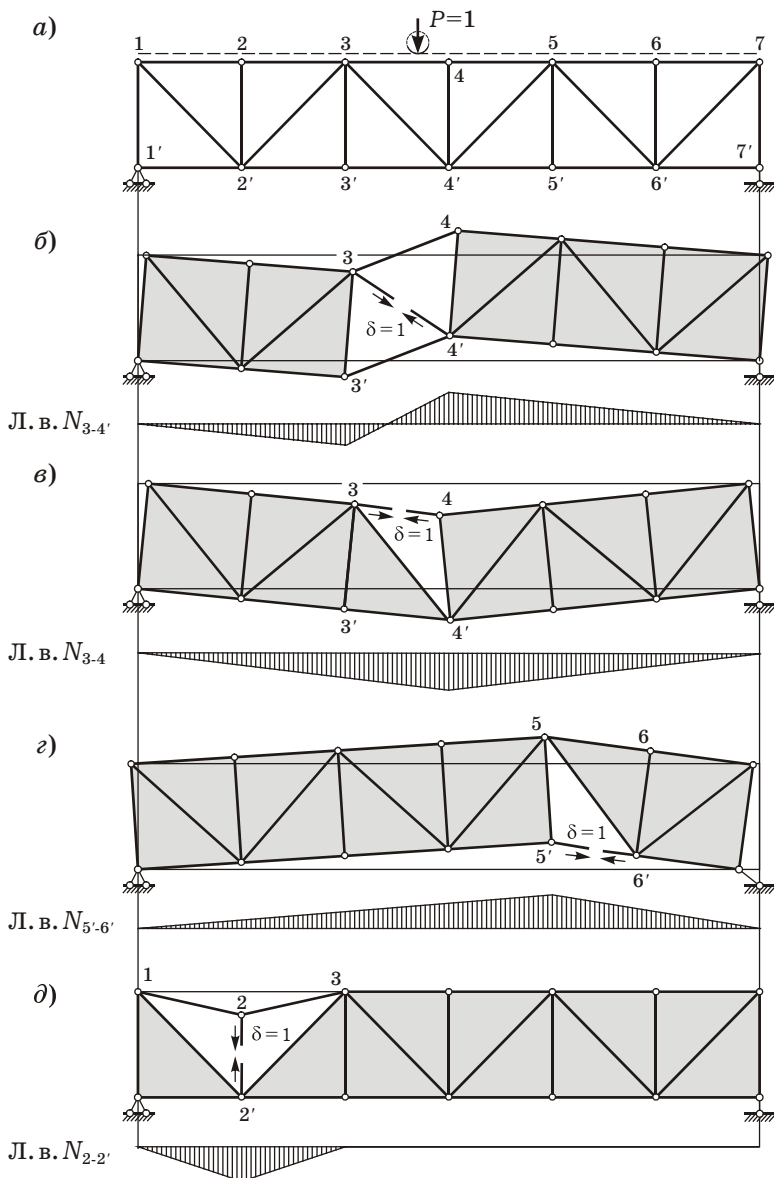


Рисунок 1.27

## 2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### 2.1 Расчет ферм способом вырезания узлов

**ПРИМЕР 1.** Для фермы на схеме (рисунок 2.1) требуется вычислить усилия во всех стержнях фермы способом вырезания узлов и построить эпюру продольных сил, приняв  $F_1 = 300$  кН,  $F_2 = 200$  кН.

Пронумеруем узлы фермы в порядке их вырезания таким образом, чтобы в вырезанном узле было не более двух неизвестных усилий.

Определим реакции опор. Для этого составим уравнения равновесия моментов относительно точек 0 и 7, предварительно направив реакции вверх:

$$\sum_k M_{k0} = 0, \quad -F_1 d - F_1 \cdot 2d - F_2 \cdot 3d + V_7 \cdot 4d = 0,$$

$$V_7 = \frac{1}{4}(3F_1 + 3F_2) = \frac{1}{4}(3 \cdot 300 + 3 \cdot 200) = \frac{1}{4} \cdot 1500 = 375 \text{ кН};$$

$$\sum_k M_{k7} = 0, \quad -V_0 \cdot 4d + F_1 \cdot 3d + F_1 \cdot 2d + F_2 d = 0,$$

$$V_0 = \frac{1}{4}(5F_1 + F_2) = \frac{1}{4}(5 \cdot 300 + 200) = \frac{1}{4} \cdot 1700 = 425 \text{ кН}.$$

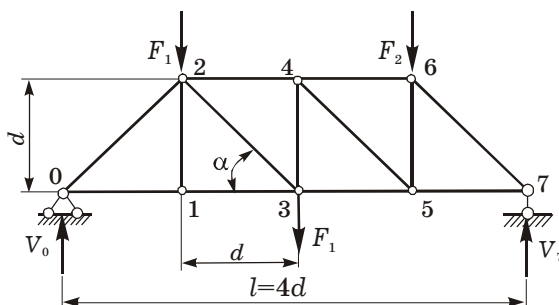


Рисунок 2.1

Реакции опор положительны, значит, их направление совпадает с выбранным ранее. Выполним проверку:

$$\sum_k Y_k = V_0 - F_1 - F_1 - F_2 + V_7 = 425 - 300 - 300 - 200 + 375 = 0.$$

Уравнение равновесия выполняется, следовательно, реакции опор вычислены верно.

Для удобства вычисления определим угол  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{d}{d} = 1,$$

отсюда  $\alpha = 45^\circ$ .

Вычислим значения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha) = \sin(45^\circ) = 0,707, \quad \cos(\alpha) = \cos(45^\circ) = 0,707.$$

Вырежем узел 0. Внутренние усилия направим от узла (рисунок 2.2, а). Составим уравнения равновесия проекций сил на координатные оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{0-2} \sin(\alpha) + V_0 = 0,$$

$$N_{0-3} = -\frac{V_0}{\sin(\alpha)} = -\frac{425}{0,707} = -601 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{0-1} + N_{0-2} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{0-1} = -N_{0-2} \cos(\alpha) = -(-601 \cdot 0,707) = 425 \text{ кН}.$$

Продольная сила  $N_{0-2} < 0$ , следовательно, стержень 0-2 сжат.

Усилие  $N_{0-1} > 0$  – стержень растянут.

Вырежем узел 1 (рисунок 2.2, б). Составим уравнения равновесия проекций сил на координатные оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{1-2} = 0;$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{1-3} - N_{1-0} = 0, \quad N_{1-3} = N_{1-0} = 425 \text{ кН}.$$

Стержень 1-3 растянут. Усилие в стойке 1-2 нулевое, значит, стержень не нагружен.

Вырежем узел 2 (рисунок 2.2, в). Составим уравнения равновесия проекций сил на координатные оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad -N_{2-0} \sin(\alpha) - N_{2-1} - N_{2-3} \sin(\alpha) - F_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} N_{2-3} &= \frac{-N_{2-0} \sin(\alpha) - N_{2-1} - F_1}{\sin(\alpha)} = \\ &= \frac{-(-601 \cdot 0,707) - 0 - 300}{0,707} = 177 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{2-4} + N_{2-3} \cos(\alpha) - N_{2-0} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{2-4} = -N_{2-3} \cos(\alpha) + N_{2-0} \cos(\alpha) = \\ = -177 \cdot 0,707 - 601 \cdot 0,707 = 425 \text{ кН}.$$

Усилия в стержнях 2-3 и 2-4 положительны, следовательно, стержни растянуты.

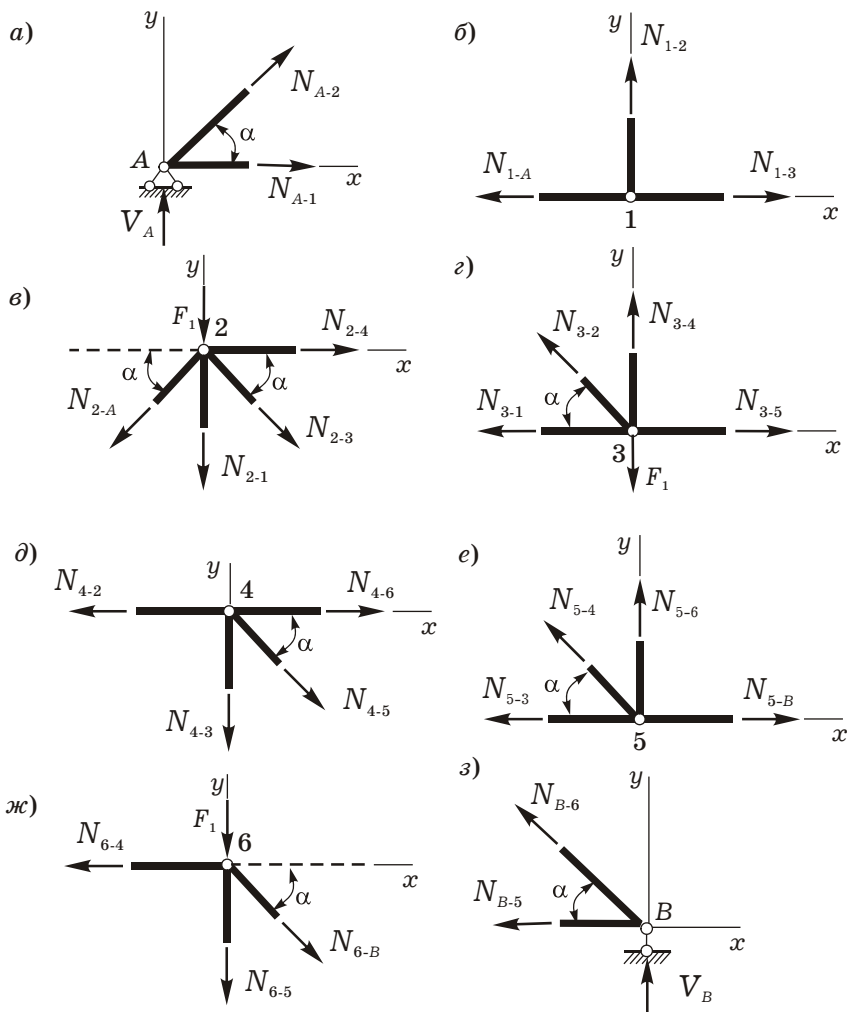


Рисунок 2.2

Вырежем узел 3 (рисунок 2.2, з). Составим уравнения равновесия проекций сил:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{3-4} + N_{3-2} \sin(\alpha) - F_1 = 0,$$

$$N_{3-4} = F_1 - N_{3-2} \sin(\alpha) = 300 - 177 \cdot 0,707 = 175 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{3-5} + N_{3-1} - N_{3-2} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{3-5} = N_{3-1} + N_{3-2} \cos(\alpha) = 425 + 177 \cdot 0,707 = 550 \text{ кН}.$$

Усилия в стержнях 3-4 и 3-5 положительны, следовательно, стержни испытывают растяжение.

Вырежем узел 4 (рисунок 2.2, д). Составим уравнения равновесия проекций сил на координатные оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad -N_{4-3} - N_{4-5} \sin(\alpha) = 0,$$

$$N_{4-5} = -\frac{N_{4-3}}{\sin(\alpha)} = -\frac{175}{0,707} = -247 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{4-6} - N_{4-2} + N_{4-5} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{4-6} = N_{4-2} - N_{4-5} \cos(\alpha) = -550 - (-247 \cdot 0,707) = -375 \text{ кН}.$$

Продольные силы отрицательны, следовательно, стержни 4-5 и 4-6 сжаты.

Вырежем узел 5 (рисунок 2.2, е). Составим уравнения равновесия проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{5-6} + N_{5-4} \sin(\alpha) = 0,$$

$$N_{5-6} = -N_{5-4} \sin(\alpha) = -(-274 \cdot 0,707) = 175 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{5-7} - N_{5-3} - N_{5-4} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{5-7} = N_{5-3} + N_{5-4} \cos(\alpha) = 550 - 247 \cdot 0,707 = 375 \text{ кН}.$$

Стержни растянуты, т. к. усилия положительны.

Вырежем узел 6 (рисунок 2.2, ж). В этом узле только одно неизвестное усилие  $N_{6-7}$ . Для его определения составим уравнение равновесия проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad -N_{6-5} - N_{6-7} \sin(\alpha) - F_2 = 0,$$

$$N_{6-7} = \frac{-N_{6-5} - F_2}{\sin(\alpha)} = \frac{-175 - 200}{0,707} = -530 \text{ кН}.$$

Уравнение проекций на горизонтальную ось используем в качестве проверки:

$$\sum_k X_k = 0, \quad -N_{6-4} + N_{6-7} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{6-7} = \frac{N_{6-4}}{\cos(\alpha)} = \frac{-375}{0,707} = -530 \text{ кН}.$$

Стержень 6-7 сжат, т. к.  $N_{6-7} < 0$ .

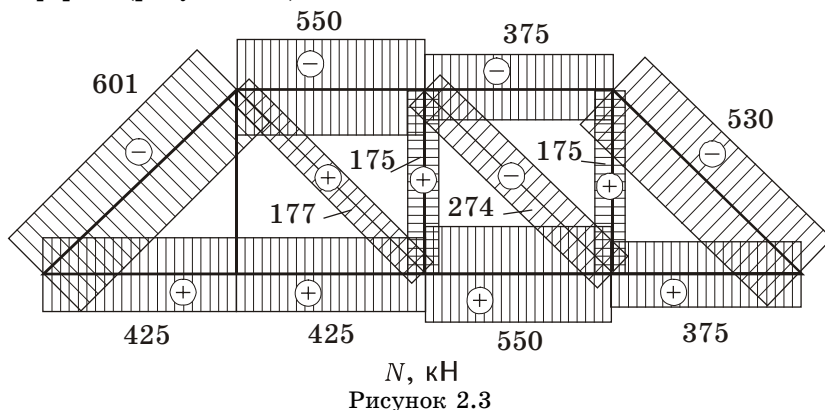
Вырежем узел 7 (рисунок 2.2, з). Усилия в стержнях, примыкающих к этому узлу, известны, поэтому условия равновесия используем в качестве проверки правильности проведенных вычислений:

$$\sum_k Y_k = N_{7-6} \sin(\alpha) + V_7 = -530 \cdot 0,707 + 375 = 0;$$

$$\sum_k X_k = -N_{7-5} - N_{7-6} \cos(\alpha) = -375 - (-530 \cdot 0,707) = 0.$$

Условия равновесия соблюдаются, следовательно, усилия в стержнях найдены верно.

По полученным данным строим эпюру продольных сил в стержнях фермы (рисунок 2.3).



**ПРИМЕР 2.** Для консольной фермы, показанной на схеме (рисунок 2.4), требуется вычислить усилия во всех стержнях способом вырезания узлов и построить эпюру продольных сил, приняв  $F = 450$  кН.

Вычислим значения синуса и косинуса заданного угла:

$$\sin(\alpha) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866, \quad \cos(\alpha) = \cos(60^\circ) = 0,5,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3} = 1,732, \quad \operatorname{ctg}(\alpha) = \operatorname{ctg}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577.$$

Из условий равновесия всей фермы определим реакции связи  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $V_B$ .

$$\sum_k M_{kA} = 0, \quad Fd + Fd + F \cdot 2d + F \cdot 3d - H_B d \operatorname{tg}(\alpha) = 0,$$

$$H_B = 9F \operatorname{ctg}(\alpha) = 9 \cdot 450 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2339 \text{ кН};$$

$$\sum_k M_{kB} = 0, \quad Fd + Fd + F \cdot 2d + F \cdot 3d - H_A d \operatorname{tg}(\alpha) = 0,$$

$$H_A = 9F \operatorname{ctg}(\alpha) = 9 \cdot 450 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2339 \text{ кН};$$

$$\sum_k Y_k = 0, \quad V_B - F - F - F - F - F = 0,$$

$$V_B = 5F = 5 \cdot 450 = 2250 \text{ кН}.$$

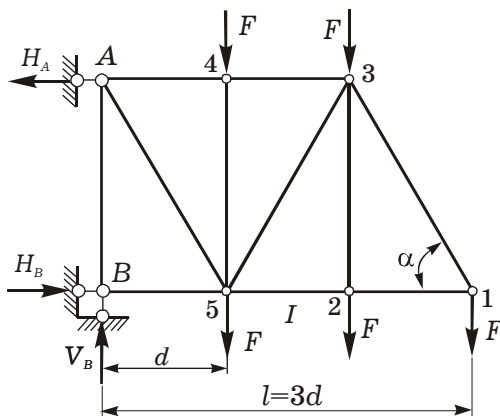


Рисунок 2.4

Вырежем узел 1 (рисунок 2.5, а). Спроецируем силы, действующие в узле, на оси координат

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{1-3} \sin(\alpha) - F = 0,$$

$$N_{1-3} = \frac{F}{\sin(\alpha)} = \frac{450}{0,866} = 520 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad -N_{1-2} - N_{1-3} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{1-2} = -N_{1-3} \cos(\alpha) = -520 \cdot 0,5 = -260 \text{ кН}.$$

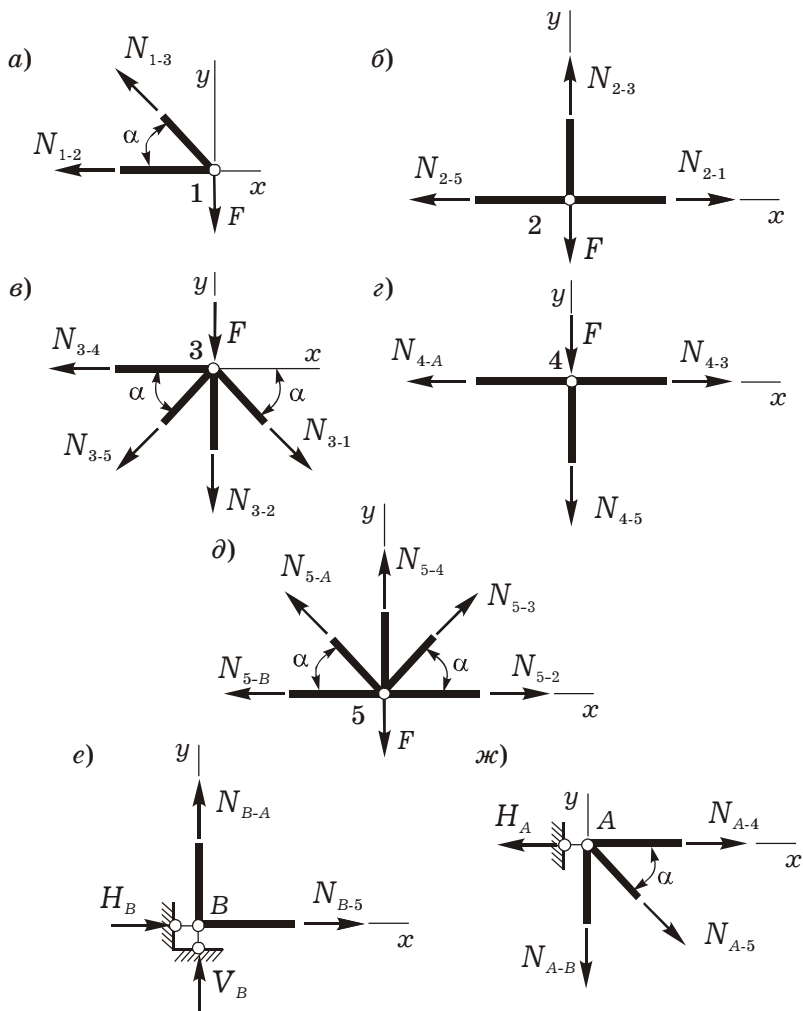


Рисунок 2.5



Раскос 1–3 растянут, стержень нижнего пояса 1–2 сжат. Вычисленное усилие откладываем на эпюре продольных сил (рисунок 2.6).

Вырежем узел 2 (рисунок 2.5, б). Составим уравнения равновесия проекций сил на координатные оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{2-3} - F = 0, \quad N_{2-3} = F = 450 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{2-1} - N_{2-5} = 0, \quad N_{2-5} = N_{2-1} = -260 \text{ кН}.$$

Стойка 2–3 растянута, стержень 2–5 сжат.

Вырежем узел 3 (рисунок 2.5, в). Составим уравнения равновесия проекций сил на координатные оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad -N_{3-1} \sin(\alpha) - N_{3-2} - N_{3-5} \sin(\alpha) - F = 0,$$

$$N_{3-5} = \frac{-N_{3-1} \sin(\alpha) - N_{3-2} - F}{\sin(\alpha)} =$$

$$= \frac{-520 \cdot 0,866 - 450 - 450}{0,866} = -1559 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad -N_{3-4} - N_{3-5} \cos(\alpha) + N_{3-1} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{3-4} = N_{3-1} \cos(\alpha) - N_{3-5} \cos(\alpha) =$$

$$= 520 \cdot 0,5 - (-1559 \cdot 0,5) = 1040 \text{ кН}.$$

Раскос 3–5 сжат, стержень верхнего пояса 3–4 растянут.

Рассмотрим узел 4 (рисунок 2.5, г). Составим уравнения равновесия проекций сил на координатные оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad -N_{4-5} - F = 0, \quad N_{4-5} = -F = -450 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{4-3} - N_{4-A} = 0, \quad N_{4-A} = N_{4-3} = 1040 \text{ кН}.$$

Стойка 4–5 сжата, стержень верхнего пояса 4–А растянут.

Вырежем узел 5 (рисунок 2.5, д). Составим уравнения равновесия проекций всех сил, действующих в узле, на координатные оси:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{5-A} \sin(\alpha) + N_{5-4} + N_{5-3} \sin(\alpha) - F = 0,$$

$$N_{5-A} = \frac{-N_{5-3} \sin(\alpha) - N_{5-4} + F}{\sin(\alpha)} =$$

$$= \frac{-(-1559 \cdot 0,866) - (-450) + 450}{0,866} = 2598 \text{ кН};$$

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{5-2} - N_{5-B} + N_{5-3} \cos(\alpha) - N_{5-A} \cos(\alpha) = 0,$$

$$N_{5-B} = N_{5-2} + N_{5-3} \cos(\alpha) - N_{5-A} \cos(\alpha) = \\ = -260 - 1559 \cdot 0,5 - 2598 \cdot 0,5 = -2339 \text{ кН}.$$

Продольная сила в стержне 5-А положительна, значит, этот стержень растянут. Стержень 5-В растянут.

Вырежем узел В (рисунок 2.5, е) и определим усилие  $N_{A-B}$ , используя уравнение равновесия проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{A-B} + V_B = 0, \quad N_{A-B} = -V_B = -2250 \text{ кН}.$$

Составив уравнение на горизонтальную ось, выполним проверку, т. к. все усилия в узле нам известны:

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{B-5} + H_B = 0, \quad N_{B-5} = -H_B = -2339 \text{ кН}.$$

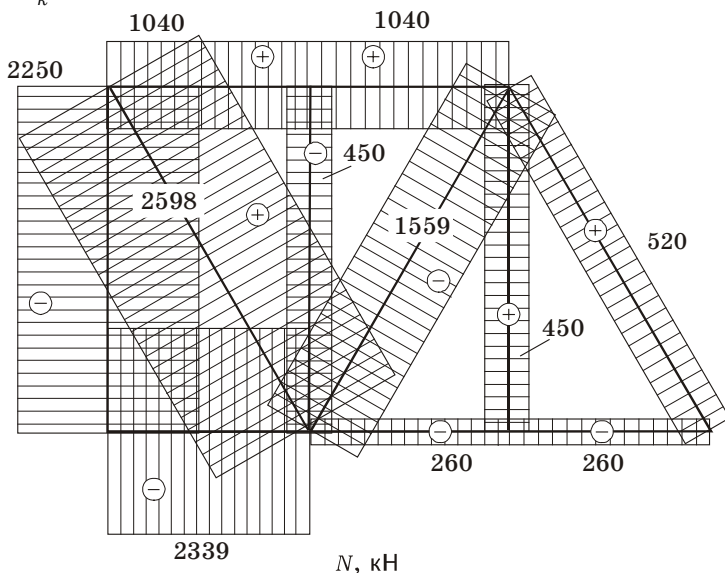


Рисунок 2.6

Усилия  $N_{B-5}$ , вычисленные в узлах 5 и В, совпадают, следовательно, усилие в стержне В- 5 найдено верно.

Таким образом, мы вычислили значения продольных сил во всех стержнях фермы.

Контролем правильности расчетов может служить равновесие узла В (рисунок 2.5, ж):

$$\sum_k Y_k = -N_{A-5} \sin(\alpha) - N_{A-B} = -2598 \cdot 0,866 - (-2250) = 0;$$

$$\sum_k X_k = -H_A + N_{A-4} + N_{A-5} \cos(\alpha) = -2339 + 1040 + 2598 \cdot 0,5 = 0.$$

Уравнения равновесия выполняются, значит, расчет выполнен верно.

По полученным результатам строим эпюру продольных сил в стержнях фермы (см. рисунок 2.6).

## 2.2 Расчет ферм способом сечений

**ПРИМЕР 3.** Для фермы, показанной на рисунке 2.7, требуется вычислить усилия во всех стержнях фермы способом сечений, приняв  $F = 200$  кН.

Определим реакции опор. Для этого составим уравнение равновесия моментов всех сил, действующих на ферму относительно точки А:

$$\sum_k M_{kA} = 0, \quad -Fd - F \cdot 2d - F \cdot 3d - F \cdot 4d + V_B \cdot 4d = 0,$$

$$V_B = \frac{10F}{4} = \frac{10}{4} \cdot 200 = 500 \text{ кН}.$$

Так как нагрузка на ферму симметрична, то реакции опор равны между собой, т. е.

$$V_A = V_B = 500 \text{ кН}.$$

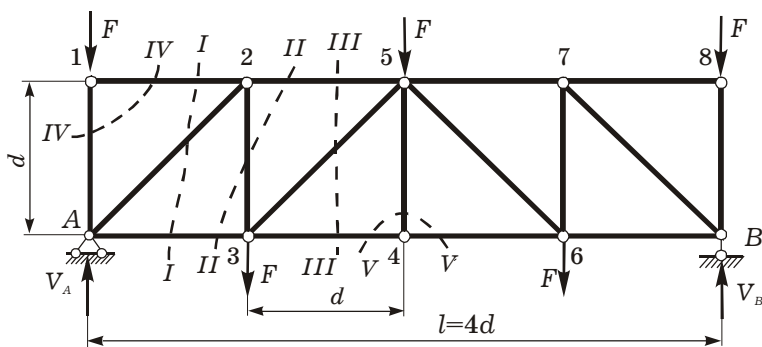


Рисунок 2.7

Проведем сечение I-I и рассмотрим равновесие левой части (рисунок 2.8, а). Определим усилие в стержне 1-2. Для этого составим

уравнение равенства моментов относительно точки  $A$  – точке пересечения двух других стержней:

$$\sum_k M_{kA} = 0, \quad N_{1-2}d = 0, \quad N_{1-2} = 0.$$

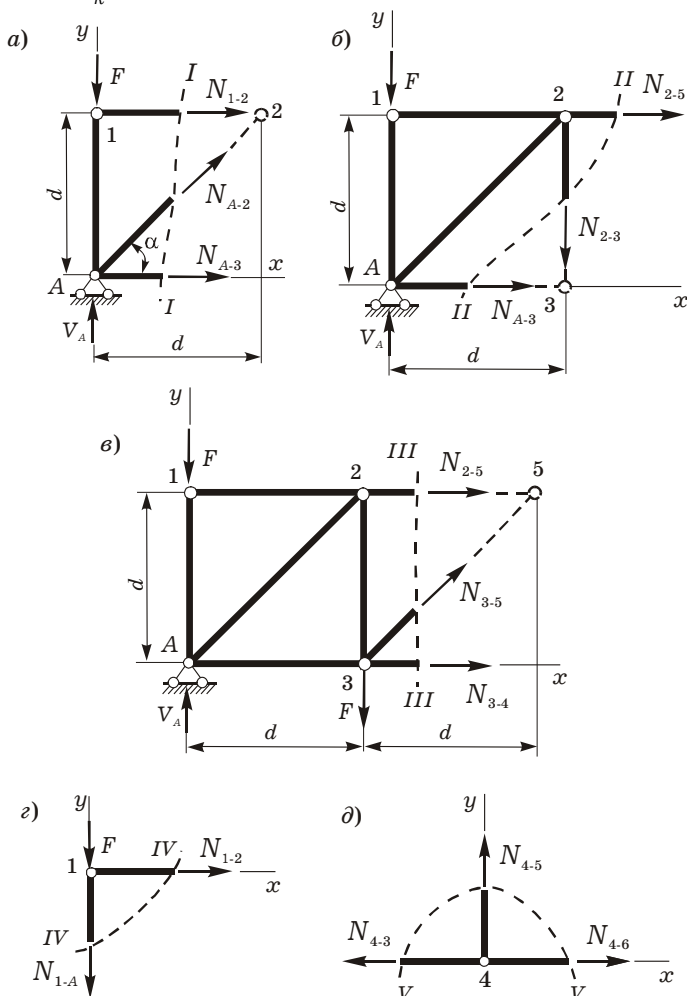


Рисунок 2.8

Найдем продольные силы в стержнях  $A-3$  и  $A-2$

$$\sum_k M_{k2} = 0, \quad N_{A-3}d + Fd - V_A d = 0,$$

$$N_{A-3} = V_A - F = 500 - 200 = 300 \text{ кН};$$

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{A-2} \sin(\alpha) - F + V_A = 0,$$

$$N_{A-2} = \frac{F - V_A}{\sin(\alpha)} = \frac{200 - 500}{0,707} = -424 \text{ кН}.$$

Для определения усилий в стержнях 2-5 и 2-3 проведем сечение *II-II* и рассмотрим равновесие левой части (рисунок 2.8, б). За моментную точку принимаем узел 3, где пересекаются стержни А-3 и 2-3:

$$\sum_k M_{k3} = 0, \quad -N_{2-5}d + Fd - V_A d = 0,$$

$$N_{2-5} = F - V_A = 200 - 500 = -300 \text{ кН}.$$

Усилие  $N_{2-3}$  определим из уравнения равновесия проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{2-3} - F + V_A = 0,$$

$$N_{2-3} = V_A - F = 500 - 200 = 300 \text{ кН}.$$

Проведем сечение *III-III*, отбросим правую часть и рассмотрим равновесие второй половины (рисунок 2.8, в). Для нахождения усилия в стержне 3-4 за моментную точку принимаем узел 5:

$$\sum_k M_{k5} = 0, \quad N_{3-4}d + Fd + F \cdot 2d - V_A \cdot 2d = 0,$$

$$N_{3-4} = 2V_A - 3F = 2 \cdot 500 - 3 \cdot 200 = 400 \text{ кН}.$$

Усилие  $N_{3-5}$  определим, спроецировав все силы на ось  $y$ :

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{3-5} \sin(\alpha) - F - F + V_A = 0,$$

$$N_{3-5} = \frac{2F - V_A}{\sin(\alpha)} = \frac{2 \cdot 200 - 500}{0,707} = -141 \text{ кН}.$$

Чтобы найти усилие в стержне А-1, вырежем узел 1 и рассмотрим его равновесие (рисунок 2.8, г).

$$\sum_k Y_k = 0, \quad -N_{1-A} - F = 0, \quad N_{1-A} = -F = -200 \text{ кН}.$$

Стержень 4-5 будет нулевым (рисунок 2.8, д), т. к.

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{4-5} = 0.$$

Учитывая симметрию фермы и нагрузки относительно стержня 4-5, продольные силы в остальных элементах можно не вычислять:

они будут равны усилиям в симметричных стержнях, вычисленным ранее, т. е.

$$N_{5-6} = N_{3-5} = -141 \text{ кН}, \quad N_{5-7} = N_{2-5} = -300 \text{ кН},$$

$$N_{4-6} = N_{3-4} = 400 \text{ кН}, \quad N_{6-7} = N_{2-3} = 300 \text{ кН},$$

$$N_{7-B} = N_{A-2} = -424 \text{ кН}, \quad N_{7-8} = N_{1-2} = 0,$$

$$N_{6-B} = N_{A-3} = 300 \text{ кН}, \quad N_{8-B} = N_{1-A} = -200 \text{ кН}.$$

Далее строим эпюру продольных сил (рисунок 2.9).

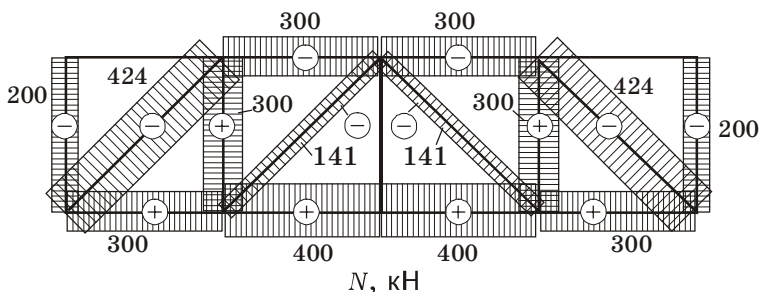


Рисунок 2.9

## 2.3 Расчет ферм на подвижную нагрузку

**ПРИМЕР 4.** Для фермы, показанной на рисунке 2.10, требуется построить линии влияния опорных реакций и продольных сил в стержнях 2-3, 2-8, 7-8, 3-8, 8-9. Груз движется по верхнему поясу.

Линии влияния опорных реакций в ферме будут такими же, как в балке (рисунок 2.10, б).

Рассечем ферму сечением *I-I* и поочередно рассмотрим равновесие ее левой и правой частей (таблица 2.1).

Усилие в стержне 3-2 определяем из уравнения моментов относительно узла 8, где пересекаются оси двух других стержней. Продольную силу в стержне 8-7 получим, составляя уравнения равновесия моментов относительно точки 2. Спроецировав силы на вертикальную ось *y*, определим продольное усилие в стержне 8-2.

Все усилия выражаются через реакции опор, и линии влияния соответствующих ветвей (правой и левой прямых) будут подобны линиям влияния соответствующих опорных реакций.

Левую прямую проводим левее узла 2, правую прямую – правее узла 3. На линии влияния проецируем узлы 2, 3 и соединяем переходной прямой. Из подобия вычисляем характерные координаты линий влияния.

Проведем сечение *II-II* (таблица 2.2).



Таблица 2.1

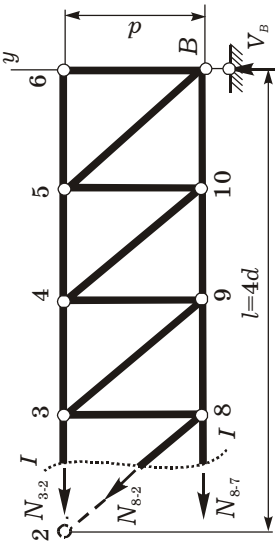
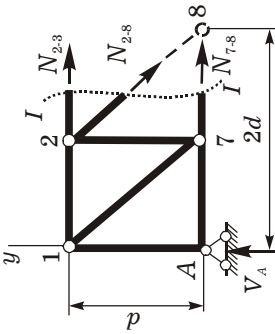
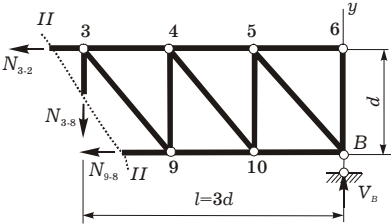
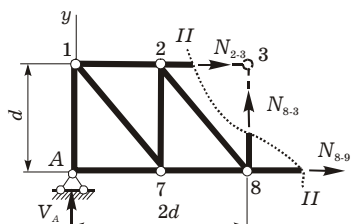
Груз $P = 1$ левее сечения $I-I$ (левее узла 2)	Груз $P = 1$ правее сечения $I-I$ (правее узла 3)
 <p><math>\sum M_8^{\text{прав}} = 0;</math>  <math>N_{3-2} d + V_B 3d = 0;</math>  <b><math>N_{3-2} = -3 V_B</math></b> – уравнение левой прямой</p> <p><math>\sum M_2^{\text{прав}} = 0;</math>  <math>- N_{8-7} d + V_B 4d = 0;</math>  <math>N_{8-7} = 4 V_B</math> – уравнение левой прямой</p> <p><b><math>\sum Y^{\text{прав}} = 0;</math></b>  <math>N_{3-2} \sin(\alpha) + V_B = 0;</math>  <math>N_{8-2} = -\frac{V_B}{\sin(\alpha)} = -\frac{V_B}{0,707} = -1,41 V_B</math>          уравнение левой прямой</p>	 <p><math>\sum M_8^{\text{лев}} = 0;</math>  <math>- N_{2-3} - V_A \cdot 2d = 0;</math>  <math>N_{2-3} = -2 V_A</math> – уравнение правой прямой</p> <p><math>\sum M_2^{\text{лев}} = 0;</math>  <math>N_{7-8} d - V_A d = 0;</math>  <math>N_{7-8} = V_A</math> – уравнение правой прямой</p> <p><b><math>\sum Y^{\text{лев}} = 0;</math></b>  <math>- N_{2-8} \sin(\alpha) + V_A = 0;</math>  <math>N_{2-8} = \frac{V_A}{\sin(\alpha)} = \frac{V_A}{0,707} = 1,41 V_A</math>          уравнение правой прямой</p>



Таблица 2.2

Груз $P = 1$ левее сечения $II-II$	Груз $P = 1$ правее сечения $II-II$
	
$\sum M_3^{\text{прав}} = 0; \quad -N_{9-8} d + V_B 3d = 0;$ $N_{9-8} = 3 V_B$ <p>(уравнение левой прямой)</p>	$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; \quad N_{8-9} d - V_A 2d = 0;$ $N_{8-9} = 2 V_A$ <p>(уравнение правой прямой)</p>
$\sum Y^{\text{прав}} = 0; \quad -N_{3-8} + V_B = 0;$ $N_{3-8} = V_B$ <p>(уравнение левой прямой)</p>	$\sum Y^{\text{лев}} = 0; \quad N_{8-3} + V_A = 0;$ $N_{8-3} = -V_A$ <p>(уравнение правой прямой)</p>

Усилие в стержне 3–8 находим из уравнения проекций всех сил на вертикальную ось. Приняв за моментную точку узел 3, определим усилие в стержне 9–8. Так как грузовым поясом является верхний, то правую прямую проводим правее узла 3, левую – левее узла 2. Проекции узлов на линию влияния соединяем переходной прямой.

Заметим, что вид линии влияния усилия в стержне 3–8 зависит от положения грузового пояса. Передаточная прямая в этом случае распространяется в пределах рассеченной панели грузового пояса.

**ПРИМЕР 5.** Для расчетной схемы фермы (см. рисунок 2.4) требуется: а) построить линии влияния в стержнях 3–4, 3–5, 2–5; б) при помощи линий влияния определить значения  $N_{3-5}$ ,  $N_{2-5}$ ,  $N_{3-4}$  от действия узловых сосредоточенных нагрузок (рисунок 2.11) и сравнить с вычисленными в примере 2. Груз движется по нижнему поясу.

Построение линий влияния в стержнях консольных ферм имеет некоторые особенности.

Для построения линии влияния усилия в стержне 3–4, изображенной на рисунке 2.11, а, рассмотрим равновесие части консоли справа от сечения  $I-I$ , полагая, что на ней находится груз  $P = 1$ . Систему координат свяжем с узлом 2, ось  $y$  направим вверх,  $z$  – вправо. Составим

вим уравнения равновесия правой части фермы. Результаты вычислений сведем в таблицу 2.3.

Таблица 2.3

Груз $P = 1$ левее сечения $I-I$ (левее узла 5)	Груз $P = 1$ правее сечения $I-I$ (правее узла 2)
$\sum M_5^{\text{прав}} = 0;$ $N_{3-4} = 0$ (уравнение левой прямой)	$\sum M_5^{\text{прав}} = 0; \quad N_{3-4} d - P(z + d) = 0;$ $N_{3-4} = \frac{P(z + d)}{d} = \frac{z}{d} + 1$ (уравнение правой прямой) $N_{3-4} _{z=0} = 1; \quad N_{3-4} _{z=d} = 2.$
$\sum M_3^{\text{прав}} = 0;$ $N_{2-5} = 0$ (уравнение левой прямой)	$\sum M_3^{\text{прав}} = 0; \quad -N_{2-5} d - Pz = 0;$ $N_{2-5} = -\frac{Pz}{d} = -\frac{z}{d}$ (уравнение правой прямой) $N_{2-5} _{z=0} = 0; \quad N_{2-5} _{z=d} = -1.$
$\sum Y^{\text{прав}} = 0; \quad -N_{3-5} \sin(\alpha) = 0;$ $N_{3-5} = 0$ (уравнение левой прямой)	$\sum Y^{\text{лев}} = 0; \quad -N_{3-5} \sin(\alpha) - P = 0;$ $N_{3-5} = -\frac{P}{\sin(\alpha)} = -\frac{1}{0,866} = -1,155$ (уравнение правой прямой)

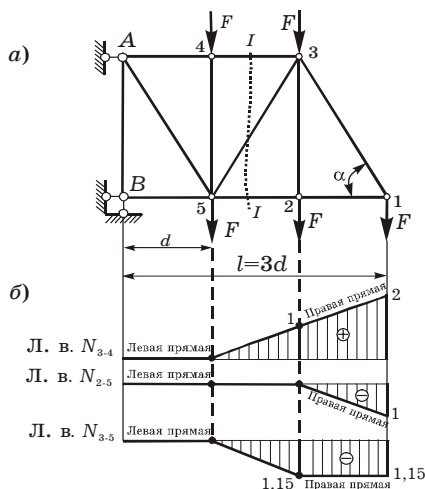


Рисунок 2.11

При нахождении груза левее узла 5 правая часть фермы будет не нагруженной, поэтому рассеченные стержни станут нулевыми.

Спроецируем узлы 2 и 5 на линии влияния. Полученные таким образом точки соединим передаточной прямой. Линии влияния показаны на рисунке 2.11, б.

Используя линии влияния, вычислим усилия в стержнях от заданной нагрузки. Для этого значение силы умножим на ординату линии влияния под ней (с учетом знака) и полученные произведения сложим:

$$N_{2-5} = F \cdot (-1) = -450 \text{ кН};$$

$$N_{3-4} = F \cdot 1 + F \cdot 1 + F \cdot 2 = 4F = 4 \cdot 450 = 1800 \text{ кН};$$

$$N_{3-5} = -F \cdot 1,155 - F \cdot 1,155 - F \cdot 1,155 = 3,465F = \\ = 3,465 \cdot 450 = 1559 \text{ кН}.$$

Полученные усилия совпадают с вычисленными ранее при расчете фермы способом вырезания узлов на неподвижную нагрузку.

## 2.4 Расчет шпренгельных ферм

**ПРИМЕР 6.** Для шпренгельной фермы (рисунок 2.12, а), требуется:

1 Равномерно распределенную нагрузку от собственного веса  $q = 40 \text{ кН/м}$  заменить нагрузкой, приложенной в узлах фермы. Панель шпренгеля принять  $d = 5 \text{ м}$ .

2 Определить усилия в стержнях 2-5, 3-3', 3-4', 3'-4' шпренгельной фермы.

3 Построить линию влияния усилия в элементе 3-3' шпренгельной фермы.

4 При помощи линии влияния определить усилие в стержне 3-3' и сравнить с результатом, полученным в п. 2.

**Расчет на неподвижную нагрузку.** Равномерно распределенную нагрузку от собственного веса фермы приведем к узловой (рисунок 2.12, б). Тогда во всех промежуточных узлах заданной фермы будет передаваться узловая нагрузка

$$F = q d = 40 \cdot 5 = 200 \text{ кН},$$

а на опорные узлы – нагрузка

$$\frac{qd}{2} = \frac{40 \cdot 5}{2} = 100 \text{ кН}.$$

Основная ферма (без шпренгелей) и узловая нагрузка, приложенная к ней, показаны на рисунке 2.13.

Из условия симметрии опорные реакции

$$V_A = V_B = \frac{8F}{2} = \frac{8 \cdot 200}{2} = 800 \text{ кН}.$$

Так как высота равна длине панели основной фермы, то угол между раскосами и поясами составляет  $45^\circ$ . Для удобства дальнейших расчетов вычислим значения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha) = \sin(45^\circ) = 0,707, \quad \cos(\alpha) = \cos(45^\circ) = 0,707.$$

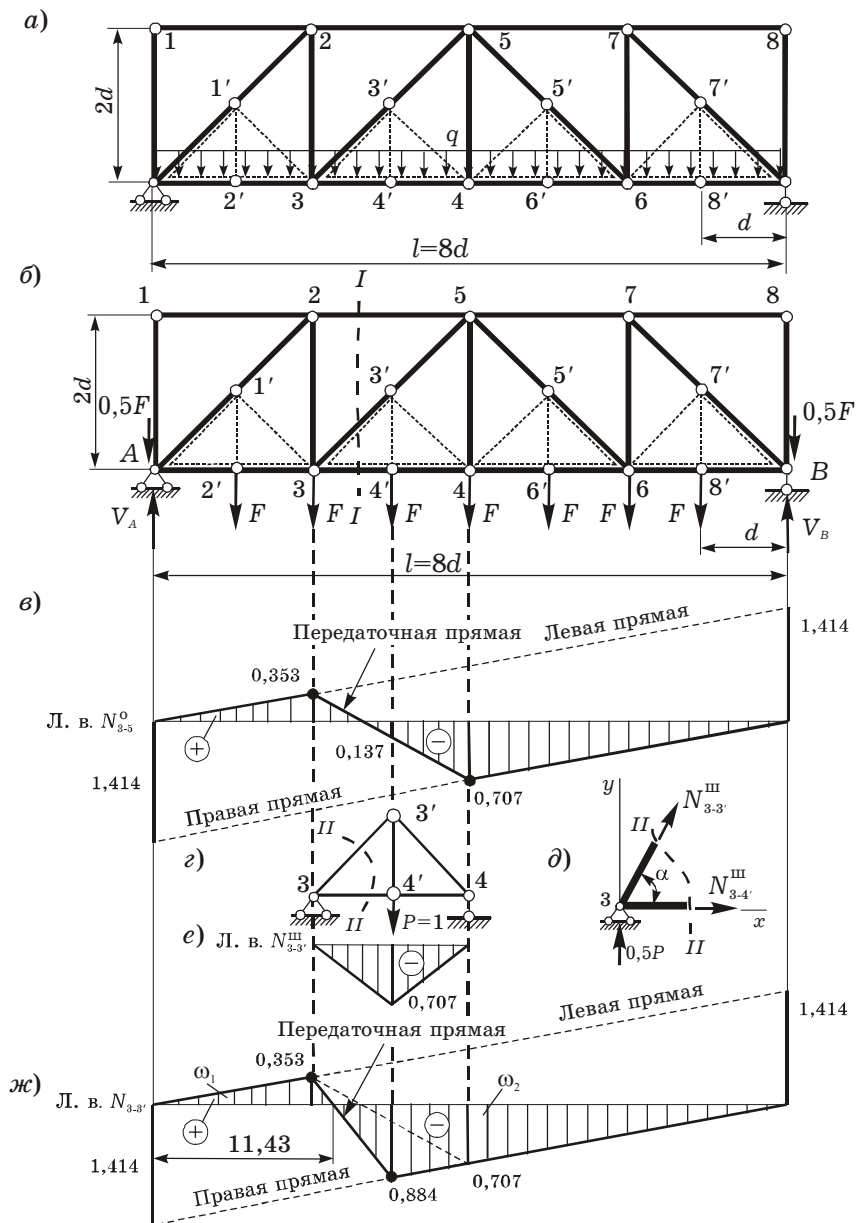


Рисунок 2.12

Усилия в стержнях фермы определяем при помощи способа сечений.

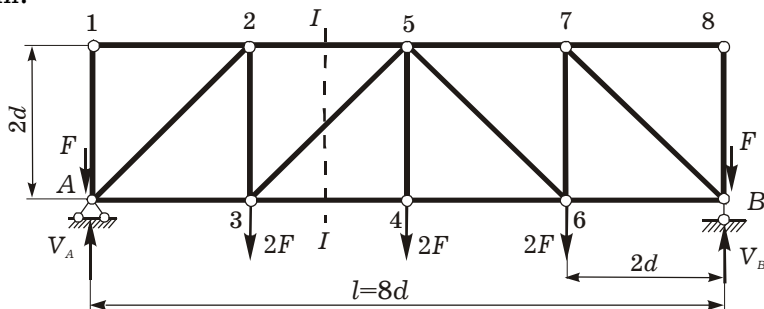


Рисунок 2.13

Для определения усилия в стержне 2-5 заданной фермы, который является элементом первой группы, т. е. принадлежит только основной ферме, проведем сечение I-I. Составим уравнение равновесия левой отсеченной части фермы относительно узла 3 (рисунок 2.14)

$$\sum_k M_{k3} = 0, \quad -V_A \cdot 2d + F \cdot 2d - N_{2-5} \cdot 2d = 0,$$

$$N_{2-5} = F - V_A = 200 - 800 = -600 \text{ кН.}$$

Усилие в раскосе 3-3', элементе третьей группы, определяем как сумму двух усилий, одно из которых действует в стержне основной фермы, а другое – в стержне дополнительной (в шпренгеле):

$$N_{3-3'} = N_{3-5}^0 + N_{3-5}^{\text{III}}.$$

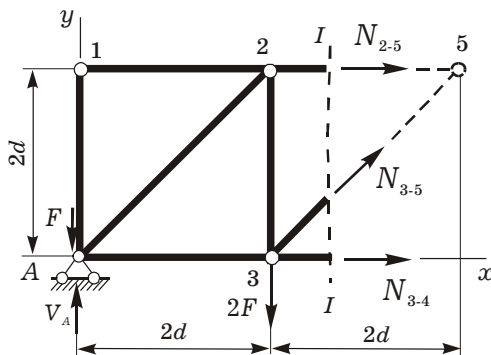


Рисунок 2.14

Усилие  $N_{3-5}^0$  определим, спроецировав все силы на ось  $y$ :

$$\sum_k Y_k = 0,$$

$$N_{3-5}^0 \sin(\alpha) - F - 2F + V_A = 0;$$

$$N_{3-5}^0 = \frac{3F - V_A}{\sin(\alpha)} = \frac{3 \cdot 200 - 800}{0,707} = -283 \text{ кН.}$$

Определим усилие  $N_{3-3'}$ . Выделим шпренгель 3-3'-4, проведем сечение II-II (рисунок 2.15, а) и рассмотрим равновесие левой части (рисунок 2.15, б):

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{3-3'}^{\text{III}} \sin(\alpha) + 0,5F = 0;$$

$$N_{3-3'}^{\text{III}} = -\frac{0,5F}{\sin(\alpha)} = -\frac{0,5 \cdot 200}{0,707} = -141 \text{ кН}.$$

Усилие в раскосе 3-3'

$$N_{3-3'} = N_{3-5}^0 + N_{3-3'}^{\text{III}} = -283 - 141 = -424 \text{ кН}.$$

Усилие в стержне 3-4' определим как сумму усилий в стержне 3-4 основной фермы и усилия в стержне 3-4' дополнительной

$$N_{3-4'} = N_{3-4}^0 + N_{3-4'}^{\text{III}}.$$

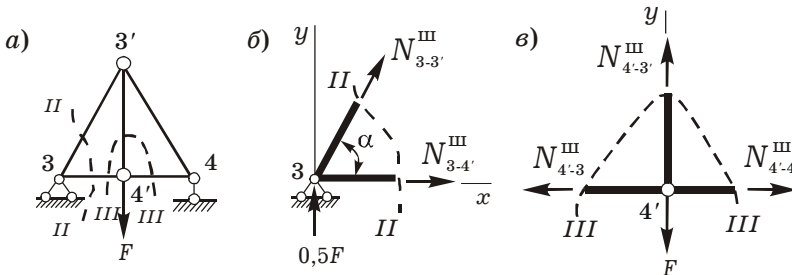


Рисунок 2.15

Для нахождения усилия в стержне 3-4 за моментную точку принимаем узел 5 (см. рисунок 2.14).

$$\sum_k M_{k5} = 0, \quad N_{3-4} \cdot 2d + F \cdot 4d + 2F \cdot 2d - V_A \cdot 4d = 0,$$

$$N_{3-4} = 2V_A - 4F = 2 \cdot 800 - 4 \cdot 200 = 800 \text{ кН}.$$

Усилие  $N_{3-4'}^{\text{III}}$  найдем из уравнения проекций сил на горизонтальную ось (см. рисунок 2.15, б).

$$\sum_k X_k = 0, \quad N_{3-3'}^{\text{III}} \cos(\alpha) + N_{3-4'}^{\text{III}} = 0;$$

$$N_{3-4'}^{\text{III}} = -N_{3-3'}^{\text{III}} \cos(\alpha) = -(-141) \cdot 0,707 = 100 \text{ кН}.$$

Тогда

$$N_{3-4'} = N_{3-4}^0 + N_{3-4'}^{\text{III}} = 800 + 100 = 900 \text{ кН}.$$

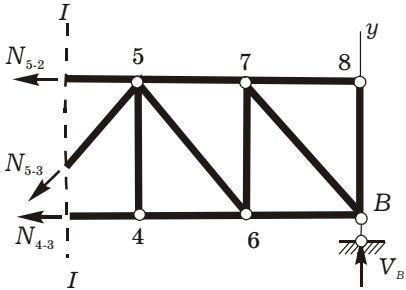
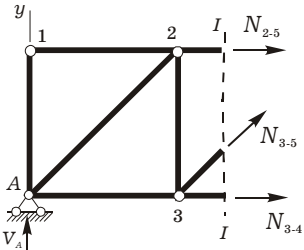
Стержень 3'–4' принадлежит только шпренгелю. Для определения усилия в нем вырежем узел 4' (рисунок 2.15, в) и составим сумму проекций на вертикальную ось:

$$\sum_k Y_k = 0, \quad N_{3'-4'}^{\text{III}} - F = 0; \quad N_{3'-4'}^{\text{III}} = F = 200 \text{ кН}.$$

**Расчет на подвижную нагрузку.** Груз  $P = 1$  движется по нижнему поясу. Построим линии влияния в стержне 3–5. Стержень относится как к основной ферме, так и к шпренгелю, поэтому линию влияния получим сложением линий влияния, построенных для стержня 3–5 основной фермы и стержня 3–3' шпренгеля.

Для построения линии влияния усилия в стержне 3–5 сделаем сечение  $I-I$  и последовательно рассмотрим равновесие левой и правой частей. Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось и получим уравнение левой и правой прямых. Результаты вычисления приведены в таблице 2.4. Далее спроецируем узлы 3 и 4 на линии влияния и полученные точки соединим передаточной прямой (рисунок 2.12, в). Получим линию влияния усилия  $N_{3-5}^0$ .

Таблица 2.4

Груз $P = 1$ левее сечения $I-I$	Груз $P = 1$ правее сечения $I-I$
	
$\sum Y^{\text{прав}} = 0;$ $-N_{5-3} \sin(\alpha) + V_B = 0;$ $N_{5-3} = \frac{V_B}{\sin(\alpha)} = \frac{V_B}{0,707} = 1,414V_B$ <p>(уравнение левой прямой)</p>	$\sum Y^{\text{лев}} = 0;$ $N_{3-5} \sin(\alpha) + V_A = 0;$ $N_{3-5} = -\frac{V_A}{\sin(\alpha)} =$ $= -\frac{V_A}{0,707} = -1,414V_A$ <p>(уравнение правой прямой)</p>

Для построения линии влияния усилия  $N_{3-5}^{\text{III}}$  вырежем шпренгель, предварительно загрузив узел 4' силой  $P = 1$ . Проведем сечение  $II-II$

(рисунок 2.12, з) и рассмотрим равновесие узла 3 (рисунок 2.12, д) дополнительной фермы

$$\sum Y = 0; N_{3-3'}^{\text{III}} \sin(\alpha) + \frac{P}{2} = 0;$$

$$N_{3-3'}^{\text{III}} = -\frac{P}{2 \sin(\alpha)} = -\frac{1}{2 \cdot 0,707} = 0,707.$$

При расположении нагрузки в узлах 3 и 4' усилие в стержне 3-3' равно нулю. Линия влияния продольной силы в элементе 3-3' шпренгеля показана на рисунке 2.12, е.

Суммарная линия влияния  $N_{3-3'}$  в шпренгельной ферме

$$\text{л. в. } N_{3-3'} = \text{л. в. } N_{3-5}^0 + \text{л. в. } N_{3-3'}^{\text{III}}.$$

На линии влияния усилия в стержне 3-5 основной фермы откладываем под узлом 4' с учетом знака ординату 0,707. Получаем точку с ординатой 0,884 и, соединив ее с вершинами ординат 0,353 (под узлом 3) и 0,707 (под узлом 4), получим результирующую линию влияния в стержне 3-3' (рисунок 2.12, ж).

**Определение усилий.** С помощью линии влияния вычислим усилие в стержне 3-3' при действии на ферму равномерно распределенной нагрузки  $q = 40 \text{ кН/м}$  (см. рисунок 2.12, а).

Точку пересечения линии влияния с нулем определим из пропорции (рисунок 2.16)

$$\frac{0,353}{x} = \frac{0,884}{5-x}; 0,353(5-x) = 0,884x;$$

$$x = 1,43 \text{ м.}$$

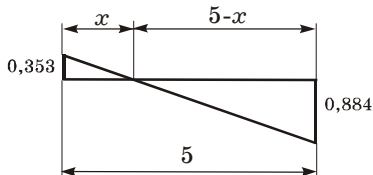


Рисунок 2.16

Площадь линии влияния

$$\omega_1 = \frac{0,353 \cdot (10 + 1,43)}{2} = 2,02 \text{ м}, \quad \omega_2 = \frac{0,884 \cdot (30 - 1,43)}{2} = 12,61 \text{ м},$$

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2,02 - 12,61 = -10,59 \text{ м.}$$

Знак минус перед  $\omega_2$  означает, что эта часть линии влияния лежит ниже оси.

Тогда

$$N_{3-3'} = q\omega = 40 \cdot (-10,59) = -424 \text{ кН}.$$

Сравнение значений усилия  $N_{3-3'}$ , полученного двумя способами, показывает, что расчеты выполнены верно.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

- 1 Бурчаков, Ю. И. Строительная механика: учеб. пособие для студентов вузов / Ю. И. Бурчаков, В. Е. Гнедин, В. М. Денисов. – М.: Высш. школа, 1983. – 255 с.
- 2 Дарков, А. В. Строительная механика. Статика сооружений / А. В. Дарков, В. И. Кузнецов. – 5-е изд., перераб. – М.: Государственное транспортное железнодорожное издательство, 1956. – 492 с.
- 3 Дарков, А. В. Строительная механика: учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
- 4 Довнар, Е. П. Строительная механика: учебник для вузов по спец. «Строительство» / Е. П. Довнар, Л. И. Коршун. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 310 с.
- 5 Иванов, В. А. Расчет статически определимых балок / В. А. Иванов, А. В. Яровая. – Гомель: УО «БелГУТ», 2002. – 58 с.
- 6 Рабинович, И. М. Основы строительной механики стержневых систем: учеб. для инж.-строит. вузов / И. М. Рабинович. – 2-е изд., перераб. – М.: Госстройиздат, 1956. – 454 с.
- 7 Саргсян, А. Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчета: учебник / А. Е. Саргсян [и др.]; под ред. А. Е. Саргсяна. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. школа, 2000. – 416 с.
- 8 Смирнов, В. А. Строительная механика: учеб. для вузов / В. А. Смирнов [и др.]; под ред. В. А. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 208 с.
- 9 Смирнов, А. Ф. Строительная механика. Стержневые системы: учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
- 10 Старовойтов, Э. И. Соппротивление материалов: учеб. для студентов технических вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель: УО «БелГУТ», 2004. – 376 с.