

ПРИМЕР РАСЧЕТА РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Задана статически неопределимая рама (рисунок 1), у которой $l = 4$ м; $h = 3$ м; $\alpha = 1,2$; $k = 0,7$; $P = 24$ кН; $q = 13$ кН/м. Требуется построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных сил N ; выполнить необходимые проверки.

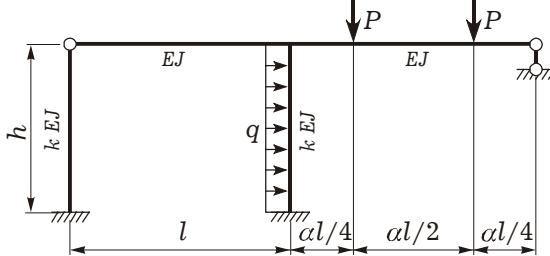


Рисунок 1

Определение количества неизвестных. Вычислим степень кинематической неопределимости по формуле: $n = n_y + n_{\text{л}}$, где n_y – число неизвестных углов поворота узлов; $n_{\text{л}}$ – число неизвестных независимых линейных перемещений узлов.

Заданная система имеет один жесткий узел, поэтому $n_y = 1$. Для вычисления $n_{\text{л}}$ преобразуем раму в шарнирную схему (рисунок 2) и определим число ее степеней свободы ($\text{Ш} = 7$ – число простых шарниров; $K = 2$ – число замкнутых контуров):

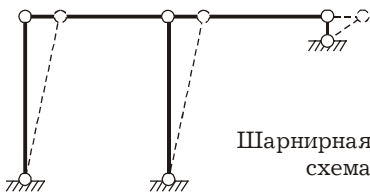


Рисунок 2

$$W^{\text{ш.с.}} = \text{Ш} - 3K = 7 - 3 \cdot 2 = 1.$$

Следовательно, $n_{\text{л}} = W^{\text{ш.с.}} = 1$. Шарнирная схема представляет собой геометрически изменяемую систему с одной степенью свободы, точки которой могут свободно двигаться по горизонтали.

Степень кинематической неопределимости $n = 1 + 1 = 2$.

Выбор неизвестных. Под действием нагрузки заданная система деформируется, ее жесткий узел K поворачивается на угол Z_1 , а узлы B , K , C смещаются по горизонтали на одну и ту же величину Z_2 (рисунок 3). Перемещения Z_1 , Z_2 будут неизвестными метода перемещений.

Формирование основной системы. Вводим плавающую заделку (связь 1) в жесткий узел рамы и горизонтальный опорный стержень (связь 2). Для компенсации дополнительных связей

основной системе необходимо придать угол поворота Z_1 и линейное смещение Z_2 , имеющиеся в заданной системе (рисунок 4).

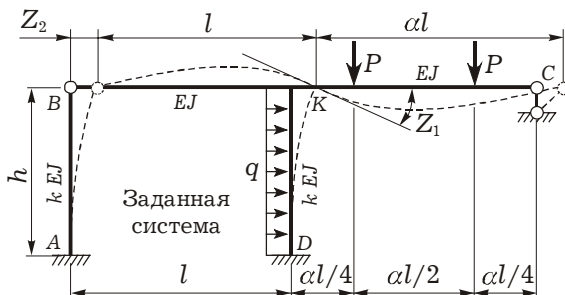


Рисунок 3

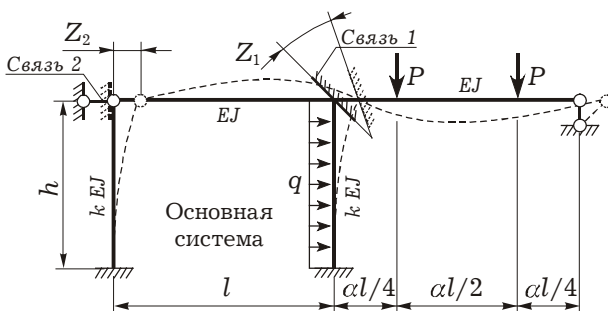


Рисунок 4

Запись системы канонических уравнений. Рама два раза кинематически неопределима, значит, будет два уравнения:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0,$$

где Z_i – неизвестное перемещение по направлению i -ой введенной связи; r_{ij} – реакция в i -ой связи от единичного перемещения j -ой связи; R_{ip} – реакция i -ой связи от внешней нагрузки.

Отметим, что r_{11} , r_{12} , R_{1p} представляют собой моментные реакции связи 1; r_{21} , r_{22} , R_{2p} – силовые реакции связи 2. При этом r_{ii} являются главными единичными реакциями; r_{ij} ($i \neq j$) – побочными; $r_{ij} = r_{ji}$.

Построение эпюр изгибающих моментов. Рассматриваем деформирование основной системы в результате поворота связи 1 на единицу (рисунок 5). Используя таблицы, строим единичную эпюру изгибающих моментов M_1 . Сразу же отмечаем значение опорной реакции в несмещающейся заделке.

Исследуем деформирование основной системы в результате единичного горизонтального перемещения связи 2 (рисунок 6). Строим единичную эпюру \bar{M}_2 . Отмечаем значения опорных реакций в несмещающихся заделках.

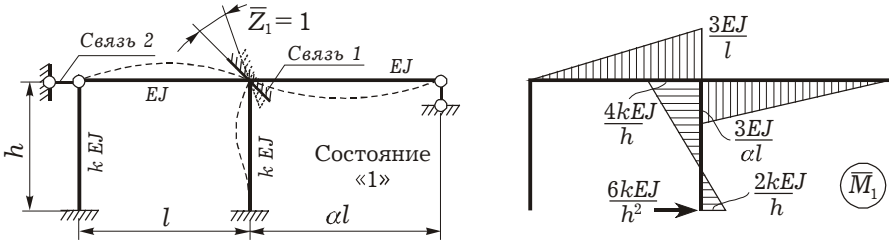


Рисунок 5

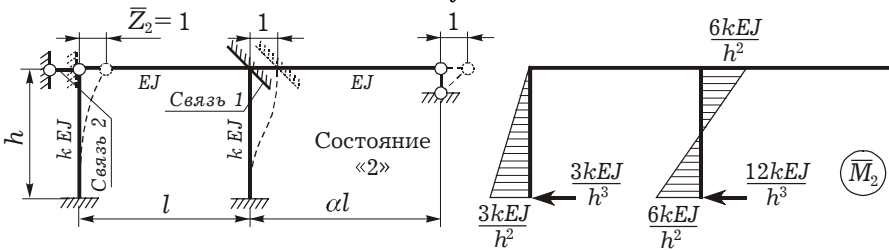


Рисунок 6

Прикладываем к основной системе только внешнюю нагрузку (рисунок 7). Пользуясь таблицами, для отдельных статически неопределимых балок строим эпюры изгибающих моментов. Изобразив их на общей базе, получаем эпюру M_p .

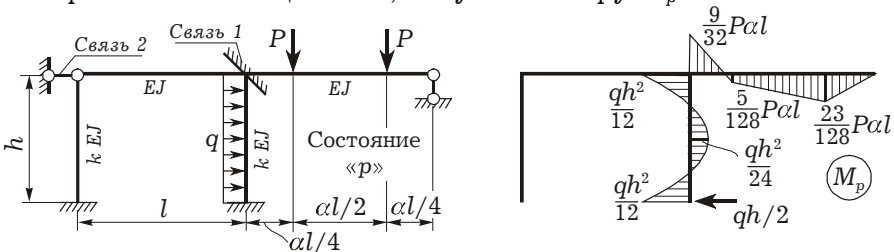


Рисунок 7

Вычисление единичных и грузовых реакций. В соответствии с типами реакций определяем их двумя способами: моментные реакции вырезанием узла, силовые – отсечением рамы от опор.

Определение моментных реакций. Найдем реакции r_{11} , r_{12} , R_{1p} 1-ой введенной связи от перемещений $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$ и от внешней нагрузки. Для этого вырежем жесткий узел с рассматриваемой связью в различных состояниях (рисунок 8) и рассмотрим его равновесие. Каждый раз будем составлять уравнение $\sum M_{узла} = 0$ и выражать из него искомую реакцию.

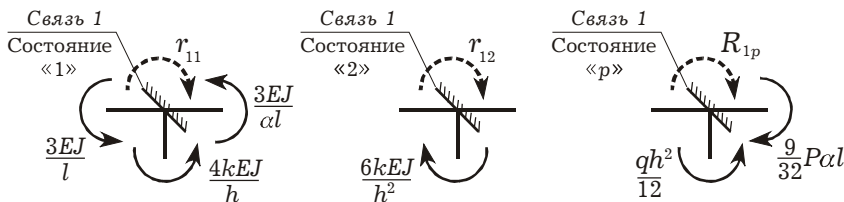


Рисунок 8

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{\alpha l} + \frac{4kJ}{h} = \frac{3EJ}{4} + \frac{3EJ}{1,2 \cdot 4} + \frac{4 \cdot 0,7EJ}{3} = 2,30833 \frac{EJ}{м};$$

$$r_{12} = -\frac{6kJ}{h^2} = -\frac{6 \cdot 0,7EJ}{3^2} = -0,46667 \frac{EJ}{м^2};$$

$$R_{1p} = \frac{qh^2}{12} - \frac{9}{32} Pal = \frac{13 \cdot 3^2}{12} - \frac{9}{32} 24 \cdot 1,2 \cdot 4 = -22,65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определение силовых реакций. Найдем реакции r_{21} , r_{22} , R_{2p} 2-й введенной связи от перемещений $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$ и от внешней нагрузки. Для этого отсечем раму от опор и рассмотрим ее равновесие в различных состояниях (рисунок 9). Будем составлять уравнение проекций на горизонтальную ось $\sum Z = 0$ и выражать из него искомую реакцию.

$$r_{21} = -\frac{6kJ}{h^2} = -\frac{6 \cdot 0,7EJ}{3^2} = -0,46667 \frac{EJ}{м^2};$$

$$r_{22} = \frac{3kJ}{h^3} + \frac{12kJ}{h^3} = \frac{3 \cdot 0,7EJ}{3^3} + \frac{12 \cdot 0,7EJ}{3^3} = 0,38889 \frac{EJ}{м^3};$$

$$R_{2p} = \frac{qh}{2} - qh = -\frac{qh}{2} = -\frac{13 \cdot 3}{2} = -19,50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проанализировав полученные значения, убеждаемся, что главные единичные реакции положительны, а для побочных выполняется условие взаимности $r_{12} = r_{21}$.

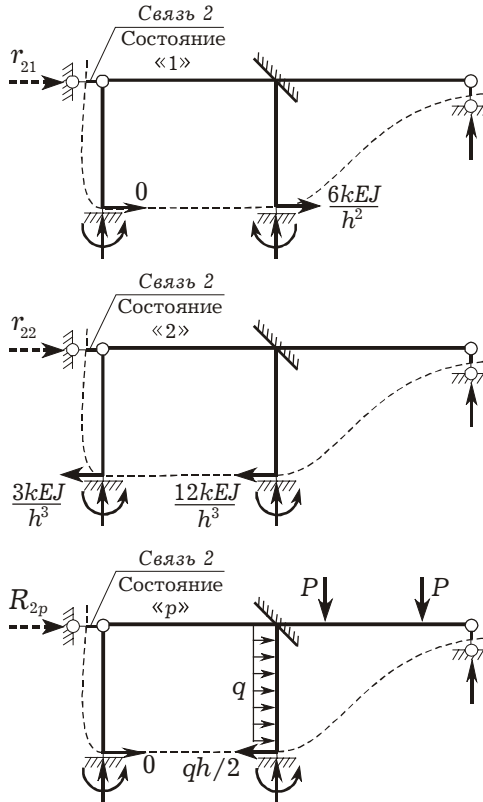


Рисунок 9

Решение системы канонических уравнений. Подставим найденные значения единичных и грузовых реакций в систему канонических уравнений:

$$2,30833 EJ \cdot Z_1 - 0,46667 EJ \cdot Z_2 - 22,65 = 0;$$

$$-0,46667 EJ \cdot Z_1 + 0,38889 EJ \cdot Z_2 - 19,50 = 0.$$

Решив систему, найдем неизвестные перемещения

$$Z_1 = 26,34 \frac{1}{EJ} \text{ (кН} \cdot \text{м}^2\text{)}; \quad Z_2 = 81,75 \frac{1}{EJ} \text{ (кН} \cdot \text{м}^3\text{)}.$$

Заметим, что Z_1 является углом поворота, Z_2 – горизонтальным перемещением.

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов.

Умножаем ординаты единичных эпюр на найденные значения перемещений Z_1 , Z_2 ; вычисляем ординаты грузовой эпюры в основной системе (рисунок 10).

Ординаты окончательной эпюры M находим по формуле:

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 11.

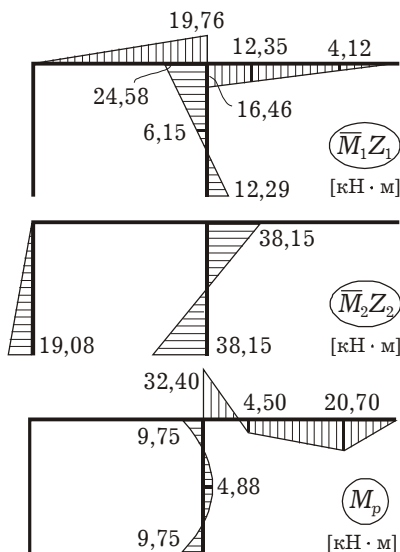


Рисунок 10

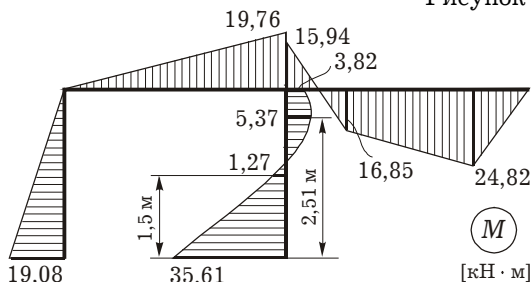


Рисунок 11

Проверка эпюры M . Статическая проверка.

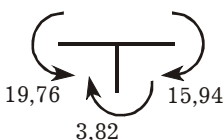


Рисунок 12

а) Проверка равновесия узлов. Вырезаем жесткий узел рамы (рисунок 12) и рассматриваем его равновесие, составляя уравнение $M^{\text{узла}} = 0$:

$$19,76 - 15,94 - 3,82 = 0.$$

Проверка выполняется.

б) Проверка ординат. Для участков, загруженных в пролете внешней нагрузкой, должны выполняться условия равенства сумм характерных ординат и их дополнений соответствующим балочным ординатам.

Выполняем проверку ординат. Для участков с двумя сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой выбираем соответствующие балки (рисунок 13, а, б), имеющие тот же пролет и схему нагружения.

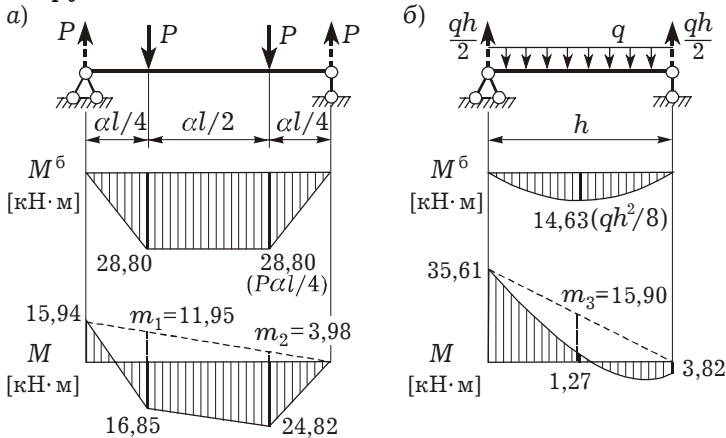


Рисунок 13

Определив опорные реакции, строим балочные эпюры моментов M^0 . (Расчеты по построению M^0 не приводим из-за их простоты). Ниже изображаем эпюры изгибающих моментов для рассматриваемых участков, взятые из окончательной эпюры M (см. рисунок 11).

Соединяем крайние ординаты эпюр M прямыми линиями и находим из подобия треугольников дополнительные ординаты (на рисунке 13 они показаны пунктиром):

$$m_1 = \frac{3}{4} 15,94 = 11,95 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad m_2 = \frac{1}{4} 15,94 = 3,98 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$m_3 = \frac{1}{2} (35,61 - 3,82) = 15,90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вычисляем суммы ординат эпюр M и соответствующих дополнений, сравниваем их с ординатами M^0 . Для первой эпюры

$$m_1 + 16,85 = 11,95 + 16,85 = 28,80 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$m_2 + 24,82 = 3,98 + 24,82 = 28,80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для второй эпюры

$$m_3 - 1,27 = 15,90 - 1,27 = 14,63 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Полученные значения совпадают с соответствующими характерными ординатами балочной эпюры моментов, проверка выполняется.

Деформационная проверка. Чтобы окончательно убедиться в правильности построения эпюры M , выполняем деформационную проверку. Она проводится так же, как и при расчете рам методом сил: вычисляется условное суммарное перемещение Δ_{sp}^* перемножением окончательной эпюры M и суммарной единичной эпюры метода сил. Значение Δ_{sp}^* должно равняться нулю:

$$\Delta_{sp}^* = \sum \int_0^l \frac{M \bar{M}_s^*}{EJ} dz = 0,$$

где \bar{M}_s^* – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов, построенная для основной системы метода сил.

Вычисляем степень статической неопределимости заданной системы (см. рисунок 1) по формуле $s = 3K - III = 3 \cdot 2 - 3 = 3$. Формируем основную систему метода сил, рассекая раму в шарнире и отбрасывая опорный стержень. Для компенсации отброшенных связей вводим три неизвестных усилия X_1, X_2, X_3 .

Далее рассматриваем суммарное воздействие на основную систему единичных сил $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1$ (рисунок 14, а) и строим эпюру \bar{M}_s^* (рисунок 14, б).



Рисунок 14

Вычисляем Δ_{sp}^* :

$$\begin{aligned} \Delta_{sp}^* = & \frac{h}{6kJ} 2 \cdot 19,08 \cdot 3 + \frac{l}{6EJ} (-2 \cdot 19,76 \cdot 4) + \\ & + \frac{h}{6kJ} (-35,61 \cdot 3,8 + 3,82 \cdot 0,8 - 4 \cdot 1,27 \cdot 2,3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha l}{4 \cdot 6EJ} (-2 \cdot 15,94 \cdot 4,8 + 2 \cdot 16,85 \cdot 3,6 - 15,94 \cdot 3,6 + 16,85 \cdot 4,8) + \\
& + \frac{\alpha l}{2 \cdot 6EJ} (2 \cdot 16,85 \cdot 3,6 + 2 \cdot 24,82 \cdot 1,2 + 16,85 \cdot 1,2 + 24,82 \cdot 3,6) + \\
& + \frac{\alpha l}{4 \cdot 6EJ} 2 \cdot 24,82 \cdot 1,2 = \frac{1}{EJ} (209,869 - 209,847) = \frac{0,022}{EJ}.
\end{aligned}$$

Полученная величина Δ_{sp}^* близка к нулю, т. е. деформационная проверка выполняется. Следовательно, окончательная эпюра изгибающих моментов построена верно.

Замечание. Вместо деформационной можно выполнить универсальную проверку:

$$\sum \int_0^l \frac{M \bar{M}_S}{EJ} dz = -(R_{1p} + R_{2p}),$$

где \bar{M}_S – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов в основной системе метода перемещений: $\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$.

Построение эпюры поперечных сил Q .

Эпюра поперечных сил (рисунок 15) построена по готовой эпюре моментов. Ход расчета ничем не отличается от рассмотренного ранее по методу сил.

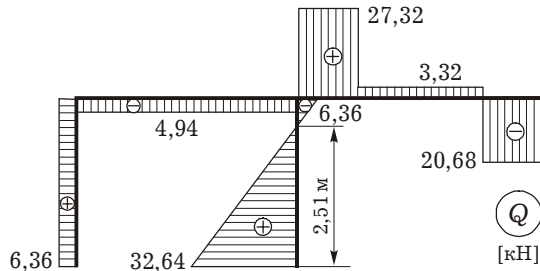


Рисунок 15

Построение эпюры продольных сил N .

Эпюру N строим по готовой эпюре Q , рассматривая равновесие узлов рамы (рисунок 16). По полученным данным строим эпюру N (рисунок 17).

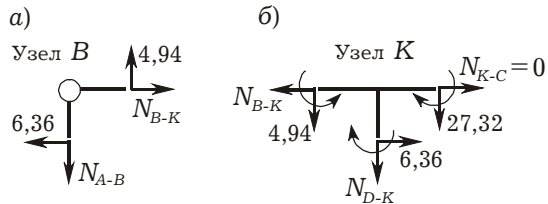


Рисунок 16

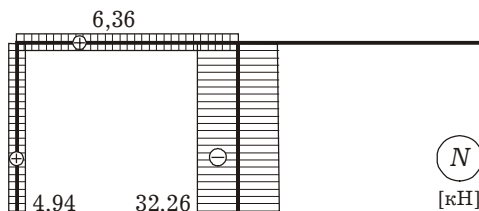


Рисунок 17

Статическая проверка равновесия рамы. Отсечем раму от опор, в местах полученных сечений приложим внутренние силы и моменты, взятые из эпюр M , Q , N (рисунок 18).

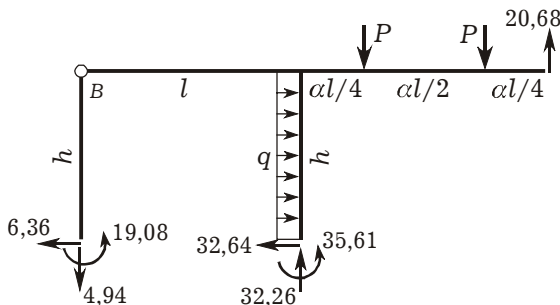


Рисунок 18

Составим уравнения равновесия рамы:

$$\sum Z = 0; -6,36 - 32,64 + qh = -39 + 13 \cdot 3 = 0;$$

$$\sum Y = 0; -4,94 + 32,26 + 20,68 - 2P = 48 - 2 \cdot 24 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; & 19,08 + 35,61 + 20,68(l + \alpha l) + qh^2/2 + 32,26l - \\ & - 6,36h - 32,64h - P(l + \alpha l/4) - P(l + 3\alpha l/4) = \\ & = 54,69 + 20,68(4 + 4,8) + 13 \cdot 3^2/2 + 32,26 \cdot 4 - \\ & - 6,36 \cdot 3 - 32,64 \cdot 3 - 24(4 + 1,2) - 24(4 + 3,6) = \\ & = 424,214 - 424,2 = 0,014 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Точность подсчетов приемлемая. Рама находится в равновесии, значит, расчет выполнен верно.